CORSO ELEMENTARE
DI
MECCANICA ED IDRAULICA

~~600911~~ 12
SBN VA1-1518970

CORSO ELEMENTARE

DI

MECCANICA ED IDRAULICA

DEL

DOTT. VINCENZO AMICI

PROF. DI MATTEMATICA-APPLICATA
NELL' I. E R. UNIVERSITÀ DI PISA

VOL. II.
CONTENENTE
L'IDRAULICA-TEORICA
VOLUME UNICO

FIRENZE
PRESSO RICORDI E JOUHAUD
1812.

TIP. E FOND. DI GIOVANNI MAZZONI

PREFAZIONE

Questo secondo volume, che trattando dell' Idraulica teorica, rende completa la prima parte del mio corso elementare di Meccanica e di Idraulica, è compilato con metodo analogo a quello che mi servì di guida nel primo. Volendomi però tenere nei rigorosi limiti della parte razionale della scienza, e non riputando opportuno il salire a molto elevati argomenti, sarei stato troppo breve; ho quindi giudicato conveniente di introdurvi parecchie applicazioni dei principj fondamentali dell' Idraulica alla soluzione di varii interessanti problemi, ammettendo quelle ipotesi che somministrano agevolmente dei risultati conformi all' esperienza, e che riescirebbe laboriosissimo se non impossibile il dedurre dalle formule generali.

Il principio esperimentale dell' eguaglianza di pressione in tutti i sensi costituisce tale proprietà caratteristica dei fluidi che, ad esempio del Poisson, non ho esitato ad assumere qual base dell' Idraulica, quantunque sia ben noto che questa proprietà non è che secondaria, e dipendente dalle leggi generali delle azioni moleculari.

Le formule fondamentali dell' Idrostatica sono dedotte in modo analoga a quello proposto dal Sig. Ostrogradsky; ma non ho creduto, come pretende questo dotto Geometra, di potermi esimere dall' ammettere preventivamente l' esposto principio, imperocchè il risguardare il differenziale completo della pressione relativo soltanto alle variazioni delle coordinate dell' elemento superficiale che si considera, involve già tacitamente la supposizione che il valore della pressione sia indipendente dall' inclinazione della superficie premuta agli assi ortogonali.

Nell' Idrodinamica ho seguito i medesimi principj ed ho partitamente considerato il caso in cui l' integrazione delle equazioni differenziali si fa completamente, e quello in cui si effettua parzialmente nel senso del moto vero delle molecule del fluido. Sono quindi passato a mostrare l' analogia che ha luogo tra le formule pertinenti a quest' ultimo moto con quelle che si riferiscono al moto lineare; e come semplici corollarj di tutti questi principj ho dedotte le leggi del moto dei liquidi per i vasi continui e discontinui, per i tubi e per gli alvei, non che la teoria delle resistenze dei liquidi e degli urti delle vene contro ostacoli fissi o mobili.

Venendo poi al moto dei fluidi elastici ho parlato specialmente della teoria del suono, dandole quella discreta estensione che mi è sembrata convenire ad un trattato elementare.

Nell' ultimo capitolo finalmente ho voluto offrire un saggio dei metodi conosciuti per risolvere in generale i problemi di Idrodinamica riferendo la massa fluida a due o a tre coordinate, presentando di più delle espressioni integrali delle relative equazioni, che racchiudono in se un grandissimo numero di soluzioni di differenti problemi.

Siccome poi nei moderni trattati di Meccanica pratica o industriale si suole prendere per fondamento il principio delle velocità virtuali unitamente a quello delle forze vive, così ho creduto bene di dimostrare come e quando essi si verifichino per i liquidi, e per i fluidi aeriformi.

Le applicazioni pratiche della Meccanica e dell' Idraulica, che annunziai dover formare un terzo volume del mio corso elementare, costituiranno la seconda parte del corso medesimo, ma la pubblicazione di essa sarà indipendente, e affatto separata dalla prima.

INDICE DEI CAPITOLI

IDROSTATICA

CAPITOLO I. *Nozioni preliminari* . . . . Pag 1

L'Idraulica si divide in Idrostatica ed in Idrodinamica. Definizione di fluido. I liquidi naturali non godono mai di una perfetta fluidità. La densità ne' fluidi si considera come funzione delle coordinate. Distinzione dei fluidi in liquidi, e fluidi aeriformi; suddivisione di questi in gas ed in vapori. — Liquidi viscosi. Come debba intendersi l'incompressibilità de' liquidi. Elasticità perfetta de' fluidi aeriformi. Legge di Mariotte sulla compressione dei medesimi. Espansione dei gas. Differenza fra vapori e gas. Dilatazione dei liquidi pel calorico, e leggi cui va soggetta. Descrizione del termometro, metodo di graduarlo. Dilatazione equabile dei gas per eguali aumenti di temperatura. Proprietà caratteristica dei fluidi di trasmettere in tutti i sensi le pressioni esercitate alla loro superficie. Come si misuri la pressione contro un elemento della superficie interna del vaso dipendentemente da pressioni esercitate alla superficie libera del liquido. Pressione dovuta alle forze acceleratrici che animano tutte le molecule di un liquido; essa deve considerarsi come funzione delle coordinate. La pressione che esercita un fluido elastico, o un vapore contro le pareti del recipiente che lo racchiude è la misura della sua forza elastica ossia della sua tensione. Le forze elastiche di un fluido aeriforme, a temperature eguali, sono proporzionali alle di lui densità.

CAPITOLO II. *Equazioni fondamentali dell' Idrostatica* . . Pag. 9

Qualunque porzione di una massa fluida equilibrata, deve essere in equilibrio in virtù delle pressioni esercitate alla sua superficie, e dipendentemente dalle forze onde essa porzione è animata. Componenti ortogonali di queste pressioni espresse per integrali dupli, eguali ordinatamente agli integrali tripli che rappresentano le componenti rettangole delle forze suddette. Tre equazioni differenziali dedotte dalle precedenti eguaglianze. Le equazioni che impedirebbero il moto rotatorio riescono inutili. Il verificarsi di una sola equazione, da cui deducesi il differenziale completo della pressione, basta a rappresentare la contemporanea sussistenza delle tre fondamentali. Integrale del valore della pressione. Questa deve sempre risultare positiva. — Della superficie di livello. Equazioni che la rappresentano. Strati di livello. Trasformazioni dell' equazioni medesime. La risultante delle forze che animano una molecula qualunque è sempre normale alla superficie di livello che passa per la molecula stessa. Casi in cui la superficie libera può essere di livello. La risultante delle forze, alla superficie libera, deve sospingere le molecule contro la superficie stessa. Equazione della superficie esteriore variamente premuta. equilibrio del filamento liquido formato da una serie di molecule situate successivamente nella direzione delle forze motrici che animano le precedenti. Esso è perpendicolare alle differenti superficie di livello. Stabilità ed instabilità dell' equilibrio del filamento medesimo.

CAPITOLO III. *Dell' equilibrio dei liquidi* . . . . . . Pag. 16

In quale ipotesi l' equilibrio di una massa liquida è sempre possibile. Equilibrio di una massa liquida attratta da un centro fisso con una forza funzione qualunque della distanza. Caso in cui l' attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Stabilità ed instabilità dell' equilibrio di più liquidi sovrapposti attratti da centri fissi a distanza finita o infinita. Esame di una pretesa contradizione nelle condizioni di equilibrio di una massa liquida attratta da un centro fisso, e vuota internamente. L' equilibrio de' liquidi pesanti è determinato dalle teorie precedenti. Pressione di un liquido grave sopra una superficie infinitesima misurata dalla profondità della superficie stessa dal supremo livello. Pressione contro il fondo de' vasi indipendente dalla loro forma. Equilibrio dei liquidi ne' tubi ricurvi, premuti variamente alle loro superficie. Teoria del Barometro Equilibrio di più liquidi sovrapposti ne' due rami di un sifone.

CAPITOTO IV. *Del centro di pressione, ed equilibrio de' galleggianti* . . . . Pag. 23

Cosa si intende per centro di pressione di un piano immerso Sua posizione relativamente al centro di gravità del piano stesso. Formule generali che determinano la situazione del centro di pressione in un piano simmetrico intorno ad un asse inclinato. Applicazione al trapezio al parallelogrammo e al triangolo Quando la superficie premuta è curva si determinano sempre una, o due forze che rappresentano le risultanti delle pressioni. Componenti ortogonali delle pressioni esercitate contro la superficie di un corpo totalmente immerso. Un corpo premuto egualmente e normalmente tutto all' intorno è sempre in equilibrio. Le componenti orizzontali delle somme delle pressioni esercitate contro la superficie di un corpo immerso in un liquido grave sono nulle; e la risultante totale delle pressioni è eguale ed opposta al peso della massa fluida spostata. Caso in cui il corpo non sia totalmente immerso, o poggi sul fondo del vaso. Risultante delle pressioni di un liquido grave contro le pareti e il fondo del vaso che lo contiene. Dell' equilibrio de' galleggianti, condizione della stabilità del medesimo. Come possa talvolta verificarsene l' esistenza determinando il *metacentro*. Leggi delle oscillazioni di un galleggiante spostato in un particolar modo dalla sua situazione di equilibrio. Moto progressivo di un grave, ad ogni istante variabilmente sommerso in un liquido.

CAPITOLO V. *Delle gravità specifiche dei corpi* . . . . Pag. 37

Cosa si intende per gravità specifica. La gravità specifica dell' acqua al massimo di densità prendesi per unità di misura. Conseguenze che se ne deducono relative al peso assoluto dell' unità di volume delle altre sostanze. Come si esplori il peso specifico di un solido che possa immergersi nell' acqua distillata. Come si operi quando il corpo è più leggiero dell' acqua. Dati i pesi assoluti e specifici di due corpi, assegnare il peso specifico del composto. Problema della corona formata di due metalli. Areometro e modo di adoprarlo per la ricerca dei pesi specifici dei solidi. Determinazione del pesi specifici dei solidi. Determinazione dei pesi specifici dei varii fluidi pesando in essi e nell' acqua distillata un corpo di dato peso assoluto. Uso degli Areometri a peso costante, o a volume immerso costante.

CAPITOLO VI. *Introduzione alla teoria dell' equilibrio de' fluidi elastici* . . . . Pag. 43

Come si rappresenti la pressione in funzione della densità e della temperatura. Espressione della densità di un gas a una data temperatura e sotto una nota pressione, cognita la pressione e la densità del medesimo sotto una temperatura diversa. Formule per determinare il peso di un dato volume di aria umida in funzione di un pari volume d' aria secca alla stessa temperatura e pressione, e della tensione del vapore contenuto nell' aria umida medesima. Del calorico specifico. Esperienze da cui si può dedurre il rapporto tra il calorico specifico a pression costante, e quello a densità costante. Questo rapporto si suol considerare indipendente dalla temperatura e dalla pressione. Tenuta ferma questa ipotesi, rendesi integrabile l' equazione che somministra la quantità di calorico necessaria ad elevare, sotto una data pressione, ad una data temperatura un chilogrammo di gas che trovavasi a 0.° e sottoposto alla pressione misurata dall' altezza barometrica 0^m,76. Equazioni che racchiudono le leggi delle forze elastiche e delle temperature dei gas compressi o dilatati, senza variazione della quantità di calorico in essi contenute. Riduzione delle equazioni trovate alla forma lineare, in una ipotesi particolare. Applicazione di esse all' aria atmosferica. Esperienze per determinare alcuni coefficienti numerici. Con quali ipotesi possano anche servire per i vapori acquei. Determinazione dei coefficienti delle equazioni medesime per i vapori. Quantità di calorico necessaria a formare un dato peso di vapore ad una certa temperatura adoprando acqua a zero gradi, espressa in gradi di calore ossia *termoposi*. Delle miscele di due o più gas o vapori.

CAPITOLO VII. *Dell' equilibrio dei fluidi elastici* . . . Pag. 56

Integrale dell' equazione che si riferisce all' equilibrio dei fluidi elastici a temperatura costante. Se la temperatura è variabile, l' equilibrio non può sussistere a meno che essa non si mantenga costante per ciascun strato di livello. Fluidi elastici attratti da centri fissi. Applicazione all' equilibrio dell' atmosfera. Relazioni fra le elevazioni di varii punti dell' atmosfera e fra la densità, le pressioni, o le altezze barometriche corrispondenti.

CAPITOLO VIII. *Della livellazione barometrica* . . . . Pag. 59

Trasformazioni delle equazioni contenute nel capitolo antecedente per servire alla misura delle distanze verticali dedotte dall' osservazione di altezze barometriche. Correzioni relative alla differente temperatura dell' aria e del mercurio nelle diverse stazioni. Riduzione a più semplice forma delle suddette formule, e determinazione dei loro coefficienti numerici.

CAPITOLO IX. *Del principio delle velocità virtuali applicato all' equilibrio dei fluidi incompressibili* . . . . Pag. 61

Il principio delle velocità virtuali ha luogo per l' equilibrio di forze le cui azioni sono trasmesse coll' intermezzo di liquidi. Lo stesso principio si verifica ancora, nel caso in cui il liquido sia animato ne' suoi elementi da forze qualisivogliano. Equazione che deve sussistere per i moti minimi compatibili colla continuità ed incompressibilità del liquido.

IDRODINAMICA

CAPITOLO I. *Equazioni fondamentali del moto de' fluidi* . Pag. 65

Espressione della velocità di una molecula qualunque di un fluido, e delle sue componenti rettangolari. La pressione, la densità, e la velocità del fluido in un punto e in un istante qualunque sono funzioni delle coordinate del punto che si considera, e del tempo. Differenziali totali della pressione, della densità, e della velocità. Applicazione del principio di D' Alembert, al movimento di una massa fluida animata da forze date. Tre equazioni fondamentali dell' Idrodinamica, ed equazione unica che da esse deducesi, comunemente detta delle forze sollecitanti. Varie trasformazioni di questa equazione. Come talvolta possa ridursi a contenere dei differenziali parziali relativi al passaggio da un punto all' altro della trajettoria descritta dalla molecula. Equazione tra la pressione e la densità dedotta dalla legge di Mariotte e relativa ai fluidi elastici. Equazioni che rappresentano la continuità della massa fluida compressibile o incompressibile. Altre forme cui possono ridursi le equazioni medesime. Condizioni di integrabilità dell'equazione delle forze sollecitanti. Esiste un caso estesissimo, in cui queste condizioni si verificano. Cosa diventano in tale ipotesi le equazioni delle continuità. Quando, e come la detta ipotesi sia ammissibile. Equazione della superficie libera di un fluido in moto. Come possano determinarsi le funzioni arbitrarie contenute negli integrali delle equazioni fondamentali dell' Idrodinamica. Espressione analitica della condizione cui sia assoggettata una molecula di un liquido, di doversi trovare costantemente sopra una superficie fissa o mobile. — Equazione della superficie libera variamente premuta. Determinazione di una o due forze equivalenti alle pressioni esercitate da un fluido in moto contro una parete. Valore delle componenti ortogonali degli sforzi tutti che un fluido in moto esercita contro il recipiente che lo contiene.

CAPITOLO II. *Del principio delle forze vive* . . . . . . Pag. 84

In un liquido in moto premuto, alla fine del tempo t, in un modo qualunque alla sua superficie, ed animato nei suoi elementi da forze quali si vogliano, la somma dei momenti virtuali di tutte le pressioni superficiali unitamente alla somma dei momenti virtuali delle forze motrici, eguaglia la semisomma della variazione di forza viva che ha sofferta la massa stessa nel tempuscolo successivo dt.

CAPITOLO III. *Del moto lineare in generale* . . . . . Pag. 86

Talvolta è permesso di considerare il moto de' fluidi come avente luogo per strati normali ad una linea che chiamasi *direttrice*. Cosa diventano in tale ipotesi le equazioni generali dell' Idrodinamica; modo diretto di ottenerle per questo caso particolare. Applicazione di esse ai fluidi incompressibili. Rapporto fra le velocità e le ampiezze delle sezioni. Dimostrazione del principio delle forze vive nel moto lineare. Pressione in una sezione qualunque e relazione tra le pressioni estreme espresse per la velocità corrispondente ad una sezione determinata. Come si possa ottenere la velocità di una sezione qualunque, e la posizione della superficie del liquido in funzione del tempo. Sforzi sofferti dal recipiente in cui si muove il fluido. Le trovata formule si riferiscono ancora al moto per tubetti o *filamenti* di sezione infinitesima.

CAPITOLO IV, *Del moto di un fluido incompressibile in un vaso semplice inesausto* . . . . Pag. 93.

Distinzione fra i vasi semplici e continui ed i vasi composti e discontinui. L'ipotesi del moto lineare è ammissibile per un liquido grave che si muove in un recipiente simetrico attorno ad un asse verticale. Determinazione della velocità dell'efflusso per la sezione infima del vaso, maggiore, minore, o eguale alla superficie suprema del liquido. Caso in cui la sezione infima è piccolissima in confronto della suprema. Quantità di liquido sgorgata in un dato tempo dalla sezione inferiore. Pressione in una sezione qualunque. Sforzo sofferto dal vaso nel senso verticale. Modificazione delle trovate formule quando si vogliono applicare a tubetti strettissimi e curvilinei. Come si considera l'efflusso da luci aperte in pareti verticali di recipienti. Portata di queste luci. Altezza media e velocità media. Se la luce è profondissima, l'altezza media corrisponde alla distanza del livello supremo dal centro di gravità della luce stessa. Altezza media di una luce trapezia, rettangolare, triangolare, o circolare. Efflusso impedito da acqua che ristagni al di fuori a un altezza costante o variabile. Pressione in una sezione qualunque. Sforzi sofferti dal vaso. Forza di reazione.

CAPITOLO V. *Del moto di un liquido grave in un recipiente che si vuota* 108

Altezza cui è dovuta la velocità dell'efflusso. Tempo impiegato dal liquido ad abbassarsi di una data quantità. Tempo del vuotamento del vaso. Portata in un dato tempo. Pressione in una sezione qualunque. Sforzi sofferti dal recipiente. Esempio del moto di un liquido grave entro un recipiente prismatico verticale fino a poca distanza dall'orifizio, ma che ad esso converge rapidissimamente con una superficie conoidale che obbliga il liquido ad escire in direzione verticale. Di alcuni casi in cui le formule trovate sono integrabili ed atte a somministrare il tempo del vuotamento del vaso, e particolarmente di quello in cui è grandissima la superficie suprema relativamente all'infima. Questa soluzione è anche applicabile ai vasi continui di qualunque forma che si vuotano per una minima luce a piano orizzontale. Determinazione della superficie interna di un vaso in cui il liquido si abbassa uniformemente. Applicazione delle esposte teorie ai minimi tubi curvilinei ed ai vasi che si vuotano sgorgando il liquido da luci a piano verticale.

CAPITOLO VI. *Dell' equilibrio, e del moto dei liquidi nei vasi mobili* . . . . Pag. 117

Moto assoluto del liquido unitamente al recipiente che lo contiene, e moto relativo del liquido rispetto al recipiente. Superficie di livello, e misura delle pressioni in un liquido grave in quiete relativa al vaso che è sollevato verticalmente, o trascinato orizzontalmente. Superficie libera di un liquido contenuto in un vaso che ruoti intorno al proprio asse verticale. Efflusso di un liquido dall'infima luce di un vaso che si vuota, mentre è sollevato da un peso attaccato ad una fune avvolta a una puleggia fissa.

CAPITOLO VII. *Dell' affusione dell'acqua nei vasi* 121

Pressione addizionale dovuta all'affusione dell'acqua alla superficie suprema. Termini che devonsi aggiungere alle equazioni tutte dedotte dall'ipotesi del moto lineare o del moto per filamenti infinitesimi. Efflusso da una luce piccolissima di un vaso quando l'acqua affluente è animata da velocità costante. Caso in cui l'acqua affluente non produce pressione addizionale. Affusione del liquido regolata per serbarne il livello costante.

CAPITOLO VIII. *Del moto dei liquidi per i vasi discontinui.* 124

Pressioni addizionali che hanno luogo nel passaggio da un tronco ad un altro dei vasi discontinui. Somma delle equazioni del moto relative a ciascun tronco. Principio delle forze vive dimostrato per i sistemi discontinui. Valore della pressione nelle sezioni dei differenti tronchi. Modificazione delle formule trovate nell'ipotesi del moto lineare. Velocità dell'efflusso della sezione infima dell'ultimo tronco. Spiegazione di un apparente paradosso relativo alla velocità degli efflussi da vasi discontinui che si vuotano. Sforzi sofferti dal recipiente parallelamente agli assi.

CAPITOLO IX. *De' vasi comunicanti* 129

Pressioni e velocità di un liquido nelle diverse sezioni di due vasi continui uno immerso nell'altro. Velocità dell'efflusso nel caso in cui uno dei recipienti sia mantenuto costantemente pieno. Espressione più semplice della stessa velocità quando la luce di esso è piccolissima. Due vasi comunicanti per via di fori laterali strettissimi. Tempo in cui il liquido si compone in essi al medesimo livello. Velocità dell'efflusso dall'ultima luce di una serie di vasi comunicanti tra loro lateralmente per piccoli fori.

CAPITOLO X. *Della contrazione della vena* 135

Quando le molecule del liquido non si affacciano al piano dell'orifizio in direzione normale ha luogo la contrazione della vena. Descrizione del fenomeno. Dimensioni e situazione della vena. Coefficiente di contrazione. Coefficiente di portata. Quello è realmente maggiore di questo, ma in pratica si confondono. Figura di un getto verticale nell'ipotesi del moto lineare. Curva descritta dell'asse della vena che sorte da una luce a piano obliquo. Valori numerici dei coefficienti di contrazione. Circostanze che alterano i valori di questi coefficienti. Formule empiriche del Bidone relative alla portata per luci scevre in parte da contrazione.

CAPITOLO XI. *Del moto dei liquidi per i tubi* 143

Tubi che uniti al recipiente formano un sistema continuo. Tubi annessi in guisa da costituire un sistema discontinuo. Contrazione che avviena all'imboccatura del tubo analoga alla strozzatura prodotta artificialmente da un diaframma. Sono applicabili al moto dei liquidi per i tubi, le formule relative al moto per i vasi discontinui. Resistenza ne' lunghi tubi, in proporzione diretta del perimetro della sezione bagnata, e nell'inversa dell'area della sezione stessa. Questa resistenza contiene due termini dipendente l'uno dalla semplice velocità, l'altro dal suo quadrato, e moltiplicati per coefficienti numerici da determinarsi coll'esperienza. Problema relativo al moto di un liquido contenuto in due recipienti, e in un lungo tubo che li metta in comunicazione. Caso in cui il tubo è per tutto di egual diametro. Soppressione del secondo recipiente. Tubi interrotti da diaframmi o rigonfi da varici. Efflusso da un tubo cilindrico inclinato di un angolo dato alla verticale. Applicazione delle esposte teorie ai brevi tubi addizionali. Aumenti di portata dovuti ai brevi tubi cilindrici, o conici divergenti. Limite teorico della divergenza. Ragioni per cui l'esperienza in questo non va sempre d'accordo colla teoria, dedotte dalla difficoltà di ottenere getti a bocca piena. Moto per tubi sinuosi. Determinazione degli sforzi sostenuti dai tubi.

CAPITOLO XII. *Del moto per gli alvei* 156

Le formule generali di Idrodinamica somministrano risultati troppo complicati per essere applicabili immediatamente ai casi pratici. Ipotesi del moto lineare ridotto a stato permanente. Equazione della superficie di livello. Relazione tra l'altezza della corrente e la lunghezza del profilo del fondo o la pendenza, che dà a conoscere la natura della curva del profilo del pelo d'acqua. Caso in cui le sezioni trasversali dell'alveo sono eguali, e la pendenza del fondo invariabile. Come colle formule trovate, si potrebbe determinare la natura delle curve che costituiscono il profilo della chiamata dello sbocco e del rigurgito. Del moto permanente ed uniforme nei tratti regolari dei fiumi. Relazioni fra le pendenze, il perimetro bagnato, l'ampiezza delle sezioni, la velocità e la portata di un fiume. Come si assegni l'inalzamento del pelo d'acqua in un fiume di corso equabile, aumentando la portata in un dato rapporto.

CAPITOLO XIII. *Dell'urto di una vena fluida* 164

Teoria Neutoniana dell'urto diretto di una vena fluida. Teoria dedotta dal moto per filamenti. Come l'urto potrebbe diventare un succhiamento. Risultamenti di questa teoria conformi all'esperienza del Morosi. Degli urti obliqui. Urto di un fluido indefinito contro un solido fermo in esso immerso. Resistenza opposta da un liquido indefinito stagnante contro un corpo che per esso si muova. Modificazioni dell'espressione di quest'urto e di questa resistenza in varj casi particolari.

CAPITOLO XIV. *Del moto di un fluido elastico per un vaso continuo* 170

Ipotesi del moto lineare applicata ai vasi di grandezza finita o ai tubetti strettissimi. Equazione del principio delle forze vive. Efflusso da un vaso che contiene del gas e che comunica inferiormente e superiormente con ampj recipienti ove la densità mantiensi costante. Contrazione per i piccoli orifizj. Caso in cui il recipiente superiore, o l'infimo, sono di grandezza comparabile col medio. Effetto delle discontinuità. Teoria del Navier dedotta dall'equazione delle forze vive.

CAPITOLO XV. *Della propagazione dell'onde nei fluidi elastici* 177

Semplificazione dell'equazione delle forze sollecitanti quando le velocità e la dilatazioni corrispondenti ai varii punti di un fluido elastico sono piccolissime. Se il moto ha luogo per un tubo cilindrico, l'equazione della continuità riducesi alla forma delle equazioni delle corde vibranti. Propagazione del moto al di quà e al di là dello spostamento iniziale. Formazione delle onde. Caso in cui avvengono più spostamenti iniziali in differenti strati della colonna fluida. Se hanno luogo due spostamenti iniziali esistono delle molecole situate in un piano, la velocità delle quali è sempre nulla. Come dalla velocità della propagazione dell'onde in un dato mezzo si possa determinare il rapporto dei calorici specifici del mezzo medesimo. Onde prodotte in un fluido elastico spostato tutto uniformemente all'intorno di un punto fisso.

CAPITOLO XVI. *Considerazioni generali sul movimento dei liquidi*

Delle funzioni arbitrarie introdotte dalla parziale integrazione delle equazioni relative al moto di un fluido considerato come avente luogo per filamenti o tubetti infinitesimi. Molti sono i movimenti che possono concepirsi e nei quali il fluido rimarrebbe continuo scorrendo entro recipienti di data figura. Applicazione delle trovate formule al moto di una massa o di un velo piano liquido le cui molecule concorrano tutte ad un punto. Analogia di questi problemi con quelli risoluti dal Prof. Venturoli. L'obbligare le molecule del liquido a secondare l'andamento di certe linee tracciate nelle superficie interne dei vasi, particolarizza troppo questi problemi. Quando poi il liquido è riferito a tre coordinate la soluzione è tanto meno generale di quella in cui si considera riferito a due sole. Diverse forme di integrali dell'equazione generale della continuità, che possono in molti casi somministrare le leggi del moto di un liquido entro vasi di data figura.

* * *

IDROSTATICA

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

1. L'Idraulica è la scienza dell'equilibrio e del moto de' fluidi; e si divide in *Idrostatica*, ed in *Idrodinamica*, secondochè si propone di rintracciare le leggi dell'equilibrio o del moto de' medesimi.

Dal confronto di queste definizioni con quelle del (*M.*§. 1.) chiaramente apparisce che l'Idraulica, l'Idrostatica, e l'Idrodinamica altro non sono respettivamente che particolari problemi di Meccanica, Statica, Dinamica.

2. Un fluido, secondo il concetto teorico che di esso dobbiamo formarci, è una collezione di punti materiali, o particelle elementari di materia, che cedono al minimo sforzo inteso a separar le une dalle altre.

Questa definizione, quantunque più propria, non differisce però sostanzialmente da quella che designa i fluidi siccome corpi, le cui particelle elementari sono del tutto sciolte e fra loro sconnesse.

Egli è sotto tale aspetto che considereremo l'equilibrio dei fluidi che esistono in natura, sebbene approssimandosi più o meno allo stato di perfetta fluidità, non possa assolutamente asserirsi che del tutto essi la godano.

3. I fluidi sono composti, come i corpi solidi, di molecule disunite, e gli spazj che le separano reputansi assai grandi comparativamente al diametro delle molecule stesse.

Potendosi poi separare il fluido in volumi piccolissimi, e quasi si direbbe insensibili, e per l'estrema divisibilità della materia contenendo essi un numero sempre immenso di molecule elementari, ci sarà concesso risguardare queste minime parti come infinitamente piccole, ma fluide.

Richiamando quindi le nozioni registrate al (*M.* §. 86.) vedremo che un fluido può considerarsi come una massa continua, la cui densità costante o variabile per gradi insensibili, si assume per una funzione delle coordinate dei varj punti della massa medesima.

4. I fluidi si distinguono in *liquidi* o in *fluidi aeriformi*; questi ultimi si suddividono in *gas* ed in *vapori*.

L'acqua, il vino, i liquidi in genere, ed il mercurio sono corpi che alle temperature ordinarie si trovano allo stato liquido. E quantunque l'estrema mobilità delle particelle elementari di essi li distingua essenzialmente da' corpi solidi, pure è diversa per ciascuno; riscontrandosi grandissima nell'etere e nell'alcool, un poco minore nell'acqua e nel vino, e scemando di molto negli ogli, nei siroppi, negli unti, e nei metalli fusi, che scorrono difficilmente, e che cadendo nell'aria tengono il filo, invece di dividersi in goccie come accade nell'acqua.

Questo particolare stato di parecchi liquidi dipende dall'aderenza che esiste tra le loro molecule, la quale produce in essi una certa *viscosità* che si oppone alla separazione delle loro parti.

Vi sono ancora de' corpi liquidi che si approssimano moltismó ai corpi solidi molli; e questi sarebbero le *paste* o *poltiglie* ec. *pâtes* ou *corps pâteux* de' francesi.

5. I liquidi sogliono anche chiamarsi fluidi incompressibili, e questa qualificazione si ammette, quantunque inesatta, imperocchè le esperienze istituite sull'acqua dimostrano che di una quantità minima soltanto essa si costipa sotto fortissime pressioni equivalenti al peso di cento e più atmosfere.

E la legge della compressibilità tale si riscontra, che un cilindro di acqua chiuso in un vaso, premuto da tanti pesi corrispondenti a varie atmosfere si abbassa per ciascuno di essi di 46 millionesimi dell'altezza anteriore.

Tolte però queste enormi pressioni, l'acqua ritorna al suo primitivo volume, sicchè essa deve tenersi come un corpo perfettamente elastico quando le forze ad essa applicate siano tanto grandi da comprimerla.

6. I fluidi aeriformi, fra cui annoverar si deve anche l'aria atmosferica, sono compressibili e dotati di un'elasticità perfetta; possono cioè cangiare contemporaneamente forma e volume me-

diante la compressione, riprendendo però esattamente la forma loro primitiva al subito cessar della compressione.

7. Un gas contenuto in un vaso prismatico a fondo stabile, e premuto superiormente da uno stantufo che chiuda esattamente il vaso, e caricato da pesi crescenti, occupa successivamente degli spazj minori, che sono inversamente proporzionali ai pesi prementi compreso il peso dello stantufo.

Diminuendo o togliendo affatto la pressione esercitata dallo stantufo contro il gas, questo spinge in alto lo stantufo e va ad occupare uno spazio di mano in mano più grande senza che possa assegnarsi un limite a un tale aumento di volume, che suol anche chiamarsi *espansione* dei gas; perchè essi tendono realmente a spandersi indefinitamente in tutti i sensi, come meglio si vedrà in seguito.

8. I vapori. quantunque siano essi pure fluidi elastici, e finchè tali si conservano vadano soggetti alle stesse leggi, ciò nulla meno diversificano dai precedenti, in quanto che per una data temperatura, e in uno spazio determinato, vuoto o ripieno di aria atmosferica, non può esser contenuta che una determinata quantità di vapore.

Egli è perciò che diminuendo, e la loro temperatura, o lo spazio che li racchiude, la porzione del vapore corrispondente alla capacità del variato spazio, o della cangiata temperatura, rimarrebbe allo stato aeriforme, ossia di fluido elastico, e l'altra porzione si condenserebbe diventando liquida. Non altrimenti accaderebbe aggiungendo nuovo vapore in uno spazio che ne fosse già saturo.

Quindi da taluno l'aria e i gas sono chiamati fluidi elastici permanenti a differenza de' vapori che facilmente riduconsi liquidi.

9. Tutti i liquidi si dilatano riscaldandoli, e diminuiscono di volume sottraendo loro del calorico. Ma per le temperature comprese fra quelle del ghiaccio fondente, e dell'acqua bollente, la variazione del loro volume è piccolissima.

Quantunque la dilatazione dovuta al calorico non proceda nei liquidi equabilmente, essendo in generale minore nelle temperature più basse, maggiore nelle più alte; pure fra le due indicate temperature può tenersi, massimamente nel mercurio, per uniforme; sicchè, per eguali quantità di calorico aggiunto o tolto, cresca e scemi equabilmente il volume del mercurio.

10. Sovra una tal proprietà de' liquidi è fondata la costruzione e la graduazione del Termometro. Consiste questo prezioso istrumento in un tubo di vetro, cilindrico, chiuso al disopra, e terminato inferiormente da una sfera la cui capacità è riempita ordinariamente di mercurio che sale ancora in una porzione del tubo.

Il minimo aumento o decremento di calore produce una variazione di volume nel liquido che è molto più dilatabile del vetro, sicchè il livello del primo si alzerà nell'un caso, e si abbasserà nell'altro.

Immergendo l'istrumento nell'acqua bollente e nel ghiaccio fondente, esponendolo così a due temperature costanti e facili a riprodursi, si notano le due differenti altezze a cui si pone entro il tubo il livello superiore del liquido, e si divide lo spazio compreso fra queste posizioni estreme o in cento, o in ottanta parti eguali, il cui numero si conta dalla minore alla maggiore altezza salendo.

Colla prima divisione si forma il Termometro Centigrado, colla seconda il Termometro di Réaumur.

11. Abbenchè ne' liquidi per un grado vicino alla congelazione sia in generale la dilatazione minore, che per un grado prossimo all'ebullizione; pure nell'acqua questa differenza è piccola, e nel mercurio riesce quasi insensibile.

Quindi dilatandosi l'acqua nel passare dall'una all'altra temperatura estrema della scala termometrica di 0,0466 del volume che essa occupa a 0° può tenersi che per ogni grado del termometro di Réaumur cangi il suo volume di 0,000586 e per un grado del Centigrado di 0,000466.

E la dilatazione del mercurio fra i suddetti estremi essendo di $\frac{2}{111}$ del volume a zero gradi corrisponderà a $\frac{1}{4440}$ per ogni grado Réaumuriano, e ad $\frac{1}{5550}$ per ogni grado centigrado.

12. La dilatazione dei gas dovuta al solo calorico è equabile per ciascuno, ed eguale per tutt'.

L'aumento di volume dell'aria o di un altro gas qualunque per ogni grado del Termometro Centigrado è $0{,}00375 = \frac{1}{267}$ del loro volume a zero gradi.

13. La proprietà caratteristica che distingue essenzialmente i fluidi dai corpi solidi, è la facoltà che hanno di trasmettere in tutti i sensi le pressioni esercitate alle loro superficie.

Noi prenderemo questa verità siccome un dato sicuro dell'esperienza ammesso da tutti i Fisici, e dalla massima parte de'Geometri che si sono occupati dell'idrostatica; e la risguarderemo qual proprietà fondamentale de' fluidi, quantunque essa non debba realmente credersi che secondaria, e dependente dalle Leggi delle attrazioni moleculari, da cui però si può, anzi si dee fare astrazione, quando si tenga conto del loro effetto che è per l'appunto quello di far godere ai fluidi di una tanto singolare proprietà.

14. Per formarsi una giusta idea dell'uniforme reparto della pressione esercitata dai fluidi egualmente in tutti i sensi, consideriamola dapprima nei fluidi incompressibili.

Suppongasi di avere un vaso prismatico retto, col fondo stabile orizzontale come è descritta nel §. 7. e s'immagini pieno di liquido non pesante, s'indichi con P il peso da cui è gravato lo stantufo compreso il proprio peso; e sia a la sezione traversale del prisma, eguale ancora alla faccia piana dello stantufo che preme contro la superficie superiore del liquido stesso.

È facile a concepirsi che il fondo del vaso dovrebbe esser premuto nello stesso modo che se il peso P fosse immediatamente applicato ed uniformemente distribuito sopra il medesimo; quindi chiamando π la somma delle pressioni risentite da una porzione α della base a, sussisterebbe la proporzione $P:\pi::a:\alpha$ da cui $\pi = \frac{P\alpha}{a}$. E nello stesso modo che la P si può risguardare come applicata al centro di gravità della base a, così pure la π si considererà applicata al centro di gravità della porzione α, rappresentando così la risultante di tante forze eguali e parallele equivalenti alle pressioni esercitate sovra gli elementi di eguale estensione della superficie stessa.

Ma non solo si trasmette dai liquidi la pressione esercitata alla loro superficie contro il fondo de' vasi che li contengono, ma ben anco contro le faccie laterali. E il principio di eguaglianza di pressione in tutti i sensi consiste precisamente nell'essere tutti i punti indistintamente delle pareti del vaso egualmente premuti dal liquido in direzioni normali alle pareti stesse. Sicchè nell'esperienza descritta, un'area α presa o sopra una delle faccie laterali del prisma o sopra la base, prova la stessa pressione $\frac{P\alpha}{a}$.

Così pure accadrebbe se il vaso contenente il liquido fosse poliedrico, e che a una faccia del medesimo si sostituisse uno stantufo di base a, e che premesse il liquido con una forza rappresentata da P. Tutti i punti appartenenti alle varie faccie interne del poliedro, non eccettuato la base dello stantufo, sarebbero normalmente ed egualmente premuti dal liquido dall'indentro all'infuori; e $\frac{P\alpha}{a}$ esprimerebbe la risultante delle pressioni contro un'area α preso sopra una qualunque delle pareti dei vaso.

Questa pressione si trasmette nello stesso modo nell'interno del liquido, in guisa tale, che considerando una porzione di liquido terminata da faccie piane, o anche un poliedro solido che vi fosse immerso, ogni porzione α delle faccie di un tal poliedro immerso risentirà una pressione normale $\pi=\frac{P\alpha}{a}$

15. Verificandosi le enunciate proprietà qualunque sia il numero delle faccie piane che costituiscono e il vaso poliedrico, ed il poliedro immerso, ne conseguita che dovranno pure aver luogo, trattandosi di vasi e di solidi immersi terminati da superficie curve.

Indicando quindi con $d\omega$ un elemento qualunque di queste superficie, $\frac{Pd\omega}{a}$ esprimerà la pressione normale da esso sofferta, quando con a e con P s'intenda sempre di rappresentare e la base dello stantufo, e la forza perpendicolare che vi è applicata.

Se poi si chiama p la pressione esercitata contro un'area eguale all'unità superficiale si otterrà $p=\frac{P}{a}$; e i prodotti $pd\omega$, e $p\alpha$

esprimeranno le pressioni che hanno luogo, e sull'elemento $d\omega$ e sull'area piana α.

16. L'esperienza dimostra che nei liquidi viscosi la propagazione laterale della pressione esercitata alla superficie, è più lenta, ma non per questo meno completa di quella che si osserva ne' liquidi privi di viscosità.

17. I liquidi pesanti, o animati ne' suoi elementi da altre forze quali si vogliono, ed equilibrati entro un vaso di qualsiasi forma, trasmettono in tutti i sensi le pressioni che hanno luogo alla loro superficie, e di più, esercitano contro le pareti dei vasi o contro le faccie de' corpi immersi, o contro porzioni de' liquidi stessi, una pressione normale dovuta alla gravità o alle altre forze sollecitanti le molecule loro, la quale ultima pressione è indipendente dalla prima, ed ha luogo ancora nel caso che manchi affatto la pressione superficiale.

Infatti se si prende un vaso pieno di un liquido pesante e si tolga pure qualunque pressione alla superficie libera, praticando nelle pareti del vaso a varie profondità dei fori, si vedrà il liquido sgorgare dai medesimi con più o meno forza, indizio certissimo che le porzioni di pareti asportate opponevano delle varie resistenze eguali e contrarie alle differenti pressioni esercitate contro di essa dal liquido, le quali resistenze non potevano essere che normali alla parete medesima (*M.* §. 114.)

18. Concludiamo dunque che la pressione in generale varia da punto a punto in una massa fluida animata da forze motrici quali si vogliano.

Ma poichè procede questa variazione per gradi insensibili; e poichè immaginando per un punto qualunque di una massa fluida condotto un piano infinitamente piccolo, può considerarsi in tutta l'estensione di quest'area elementare la pressione costante non solo, ma totalmente indipendente dalla inclinazione dell'area stessa rispetto alla direzione delle forze motrici; così ne conseguita, che si potrà riguardare la pressione in un punto qualunque della massa fluida qual funzione delle sole coordinate della massa stessa.

Rappresenti a cagion d'esempio $d\omega$ un'area infinitesima condotta con un'inclinazione qualunque per un punto della massa fluida corrispondente alle coordinate x, y, z; $pd\omega$ rappresenterà la pressione normale esercitata dal liquido contro l'area medesima, quando con p si esprima la pressione referita all'unità superficiale, cioè la resultante delle pressioni che avrebbero luogo contro un'area piana unitaria i punti della quale fossero tutti egualmente premuti come lo sono quelli dell'elemento $d\omega$. La quantità p potrà dunque tenersi per una funzione di x, y, z, e ad essa aggiungere si dovrebbe la pressione esercitata superficialmente, cioè la $\frac{P}{a}$, per ottenere l'intiera pressione referita all'unità superficiale corrispondente ad un punto qualunque del fluido.

19. Il principio di eguaglianza di pressione in tutti i sensi che abbiamo riscontrato ne' liquidi, sussiste ancora ne' fluidi elastici colla differenza però, che questi in virtù della tendenza indefinita ad espandersi, (§. 7.) esercitano contro tutti i punti delle pareti de' vasi che le contengono delle pressioni normali ed eguali, indipendentemente, e dagli sforzi operati alle loro superficie, e dall'effetto delle forze sollecitanti i loro elementi. Avendosi quindi un vaso chiuso entro cui sia contenuto o dell'aria, o un'altro gas o vapore qualunque dal cui peso facciasi astrazione, la pressione esercitata contro le pareti, e riferita all'unità superficiale sarà costante per tutto l'interno del vaso e rappresenterà la *forza elastica* del fluido che prendesi ad esame.

Se nell'esperimento citato al §. 7. si chiami P il peso dello stantufo che racchiude o comprime un gas, o un vapore entro un cilindro di sezione a; $\frac{P}{a}$ esprimerà la forza elastica o la *tensione* del gas o vapore compresso.

20. La forza elastica di un gas dipende dalla materia, dalla densità, e dalla temperatura del medesimo; e l'esperienza (§. 7.) citata che dimostra scemare i volumi dello stesso gas mantenuto alla medesima temperatura inversamente ai pesi comprimenti, ci rende palese che a temperature eguali la forza elastica, ossia la pressione riferita all'unità superficiale, è, in un dato fluido elastico, proporzionale alla di lui densità.

Indicando perciò con ρ la densità del fluido, si avrà $p = k\rho$

nella qual formula k denota un coefficiente costante dipendente soltanto dalla materia, e dalla temperatura del fluido e di cui in seguito determineremo la forma.

Se il fluido è animato dalla gravità o da altre forze date, la pressione p varierà da un punto all'altro del vaso e si vedrà a suo luogo il modo di determinarla.

CAPITOLO II.

Equazioni fondamentali dell' Idrostatica.

Fig. 1 21. Sia proposto di rintracciare le condizioni di equilibrio di una massa fluida continua, omogenea o eterogenea, compressibile o incompressibile, animata in tutti i suoi punti da forze date.

Riferiscasi perciò il sistema a tre assi ortogonali delle x, y, z e s' indichino con X, Y, Z le componenti delle forze acceleratrici che animano un punto qualunque m della massa fluida, determinato dalle coordinate x, y, z corrispondente alla pressione p e alla densità ρ.

Egli è certo che prendendo in qualsiasi posizione dell' Interno del fluido equilibrato una porzione del medesimo, di forma e di grandezza arbitraria, dovrà questa essere in equilibrio anche immaginandola solidificata senza cangiamento di volume e di figura, sicchè le pressioni che si esercitano alla di lei superficie, dal fluido circostante dovranno far equilibrio alle forze motrici che animano la massa resa solida. (*M.* §. 156.)

22. Indicando quindi con x, y, z, le coordinate di un' elemento $d\omega$ di questa superfice, e con $pd\omega$ la pressione esercitata contro la medesima nel senso della normale n.

$$pd\omega\cos.\widehat{nx}\ ;\ pd\omega\cos.\widehat{ny}\ ;\ pd\omega\cos.\widehat{nz}$$

ne rappresenteranno le componenti parallele agli assi. Ma poichè $\mp d\omega\cos.\widehat{nx}$, $\mp d\omega\cos.\widehat{ny}$, $\mp d\omega\cos.\widehat{nz}$ non sono respettivamente che le projezioni nei piani zy, xz, yx dell' elemento $d\omega$, cioè $dydz$, $dzdx$, $dydx$, valendo il segno superiore se le normali fanno angoli ottusi positivi o negativi cogli assi dell' x y, z, respettivamente, e l' inferiore se le normali stesse fanno degli angoli positivi o negativi ma acuti cogli assi medesimi; quindi ne conseguita che $\mp p dy dz$, $\mp p dx dz$, $\mp p dy dx$ denotano le componenti ortogonali di una tale pressione $p d\omega$, dovendosi prendere il segno negativo per gli elementi corrispondenti a normali che facciano angolo ottuso cogli assi, e il positivo per quelli le cui normali formano angoli acuti coi medesimi.

Gl' integrali $\int\int p dz dy$, $\int\int p dz dx$, $\int\int p dx dy$.

estesi a tutta la superfice della massa congelata esprimeranno dunque ordinatamente le somme delle componenti ortogonali delle forze tutte che agiscono contro la superficie stessa, e saranno composti di termini positivi e negativi a norma della convenzione stabilita.

23. Ma se x', y', z', sono le coordinate di un punto qualsivoglia dell' interno della massa congelata, e s' indichino con lettere parimente accentate le quantità che ad esso punto si riferiscono, gl' integrali

$$\int\int\int X'\rho' dx' dy' dz',\quad \int\int\int Y'\rho' dx' dy' dz',\quad \int\int\int Z'\rho' dx' dy' dz'$$

estesi a tutta la massa stessa, saranno le somme delle componenti parallele agli assi delle forze motrici onde essa è animata.

Dovranno perciò sussistere l' equazioni necessarie ad impedire il moto progressivo, e il moto rotatorio della contemplata porzione di fluido resa solida, e al primo oggetto si sodisfarà ponendo

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \int\int\int X'\rho' dx' dy' dz' &= \int\int p\ dy\ dz \\ \int\int\int Y'\rho' dx' dy' dz' &= \int\int p\ dx\ dz \\ \int\int\int Z'\rho' dx' dy' dz' &= \int\int p\ dy\ dx \end{aligned}\right.$$

24. Ma osserviamo che la prima di queste, a cagion di esempio, può anche scriversi nel modo seguente;

$$\int\int(\int X'\rho' dx')dy\ dz = \int\int p dy dz\ ;$$

nella quale l' integral parziale definito $\int X'\rho' dx'$ sarà una funzione delle coordinate superficiali x, y, z. Sicchè gl' integrali dupli in ambi i membri saranno presi fra gli stessi limiti cioè fra quelli corrispondenti alla più volte rammentata superficie del fluido congelato, che può essere qualsivoglia.

Dovendo dunque questa equazione sussistere qualunque sieno i limiti degl' integrali, e dovendo parimente aver luogo le analoghe dedotte dalle due ultime delle (1) converrà che sia.

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dp}{dx}\right)=X\rho\\ &\left(\frac{dp}{dy}\right)=Y\rho\\ &\left(\frac{dp}{dz}\right)=Z\rho \end{aligned}\right.$$

25. Facile è il convincersi che queste sole equazioni sono necessarie e bastanti ad assicurare l'equilibrio della porzione arbitraria di fluido presa in esame, e quindi ancora dell'intiera massa del fluido medesimo. Infatti esse rendono identiche anche l'equazioni che starebbero ad impedire il moto rotatorio, cioè le seguenti

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int\int\rho'(Y'x'-X'y')dx'dy'dz'=\int\int p(xdx-ydy)dz=\\ &\quad\int\int(\int\rho'Y'x'dy')dxdz-\int\int(\int\rho'X'y'dx')dydz\\ &\int\int\int\rho'(Z'y'-Y'z')dx'dy'dz'=\int\int p(ydy-zdz)dx=\\ &\quad\int\int(\int\rho'Z'y'dz')dydx-\int\int(\int\rho'Y'z'dy')dzdy\\ &\int\int\int\rho'(X'z'-Z'x')dx'dy'dz'=\int\int p(zdz-xdx)dy=\\ &\quad\int\int(\int\rho'X'z'dx')dzdy-\int\int(\int\rho'Z'x'dz')dxdy \end{aligned}\right.$$

26. Si noti che per quanto si disse al §. 18. la pressione non è dipendente che dalle coordinate x, y, z, corrispondenti all'elemento $d\omega$, e per nulla dagli angoli $\widehat{nx}$, $\widehat{ny}$, $\widehat{nz}$ che forma la normale al medesimo cogli assi ortogonali, e perciò il differenziale totale di p sarà espresso da

$$(3)'\qquad dp=\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz.$$

Sommando quindi le (2) dopo averle moltiplicate respettivamente per dx, dy, dz si otterrà.

$$(4)\qquad dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

e la sussistenza delle (2), e in conseguenza dell'equilibrio dell'intera massa fluida, sarà implicita nella possibile esistenza della (4). Infatti perchè questa possa sussistere, conviene che il trinomio $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ rappresenti un differenziale esatto di una funzione p delle tre variabili indipendenti x, y, z, e quindi che sia comparabile col secondo membro della (3)'. Il qual confronto necessariamente ci riconduce alle (2).

27. Indicando con S la risultante delle tre forze X, Y, Z, e con s la retta secondo cui essa è diretta, si avrebbe (*M.* §. 231.)

$$Sds = Xdx + Ydy + Zdz$$

onde la (4) si può ridurre alla

$$(4)' \qquad dp = \rho Sds$$

Adempita che sia la condizione d'integrabilità del suddetto trimonio $\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \rho Sds = d.\Psi(x, y, z)$, e assicurato quindi l'equilibrio del fluido, otterremo

$$(5) \quad p + \text{cost.} = \Psi(x, y, z) = \int \rho(Xdx, Ydy, Zdz) = \int \rho Sds$$

la qual formula nel caso speciale in cui $Sds = (Xdx + Ydy + Zdz)$ sia un differenziale esatto, eguale a $d\psi'(s) = d\psi_{0}(x, y, z)$

$$(6) \qquad p + cost. = \int \rho d\psi$$

28. In generale conviene che il valore di p dedotto da queste equazioni sia positivo, altrimenti le molecule fluide invece di premersi scambievolmente tenderebbero a separarsi le une dall'altre senza che alcuna forza potesse loro impedire questa disunione.

29. Si chiama superficie di livello in un fluido equilibrato, quella in cui la pressione è nulla o costante; sarà quindi determinata dalla condizione $dp = 0$, che per la (4) necessariamente ci conduce alla

$$(7) \qquad d\psi = Xdx + Xdy + Zdz = 0$$

Essendo questa un'equazione differenziale fra le tre variabili x, y, z, apparterrà ad un'infinità di superficie di livello rappresentate tutte dall'integrale

$$(8) \qquad \psi(x, y, z) = C,$$

in cui la costante C può avere un valore qualsivoglia. Facendo dunque variare questa costante per gradi insensibili, l'integrale apparterrà successivamente a tante superficie di livello fra loro vicinissime, e gli strati fluidi compresi fra due di tali superficie consecutive si chiameranno *strati di livello.*

Riducendosi la (7) alla

$$(7)' \qquad Sds = 0$$

e supponendo che la forza S non sia nulla per verun punto della massa fluida, si avrà

$$(9) \qquad ds = \left(\frac{ds}{dx}\right) dx + \left(\frac{ds}{dy}\right) dy + \left(\frac{ds}{dz}\right) dz = 0$$

e questa sarà un'altra equazione differenziale che apparterrà pure alla superficie di livello, e il di cui integrale sarà dato dalla $s =$ *cost.*

30. Se con N s'indica una normale ad una qualunque superficie di livello rappresentata dalla (7), e si ponga $S = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ si avrà per la Nota III. della Meccanica

$$\text{Cos.}\widehat{Nx} = \frac{X}{S} = \text{Cos.}\widehat{Sx}$$

$$\text{Cos.}\widehat{Ny} = \frac{Y}{S} = \text{Cos.}\widehat{Sy}$$

$$\text{Cos.}\widehat{Nz} = \frac{Z}{S} = \text{Cos.}\widehat{Sz}$$

Le quali equazioni ci rendono palese dover essere le superficie di livello normali alle direzioni delle risultanti S delle forze acceleratrici che animano le molecule fluide situate sulle medesime.

31. La superficie libera del fluido sarà di livello quando non sia soggetta a veruna pressione esteriore, o allorchè si eserciti su di essa una pressione costante. Sarà quindi rappresentata dalla (8) in cui dovrà convenientemente determinarsi la costante C perchè entro questa superficie sia contenuta l'intera massa fluida data.

La risultante S delle forze che animano le molecule situate alla superficie, libera di livello, oltre esserle normale, deve anche sospingere le molecule contro la superficie suddetta, quando però questa non sia sottoposta a una costante pressione esteriore

32. La superficie libera può non essere di livello allorchè si eserciti su di essa una pressione variabile.

E denotando in tal caso con x', y', z' le coordinate de' suoi punti, ed esprimendo con $p = \Phi(x', y', z'.)$ la legge della variabilità della pressione a cui è soggetta, potrà facilmente ritrovarsene l'equazione.

Infatti egli è evidente che il valore di p tratto dalla precedente equazione deve coincidere con quello ricavato dalla (5) e corrispondente alle coordinate x', y', z'; si avrebbe quindi

$$\Psi(x', y', z') - cost = \Phi(x', y', z') \tag{10}$$

nonchè la di lei differenziale

$$\rho'(X'dx' + Ydy' + Z'dz') = d\Phi(x', y', z',)$$

che apparterrebbero ambedue alla richiesta superficie libera variabilmente premuta.

33. In natura le forze che animano le molecule fluide, sono, generalmente parlando, attrazioni, o ripulsioni verso centri fissi sicchè il trimonio $Xdx + Ydy + Zdz$ è un differenziale esatto che proseguiremo ad indicare con $d\psi$. Ciò accade ogni qualvolta la forza resultante S sia una funzione $F(s)$ della retta s secondo cui è diretta. Ammessa dunque questa ipotesi procederemo in seguito a rintracciare separatamente le condizioni di equilibrio dei fluidi incomprensibili e de' fluidi elastici, le quali condizioni saranno tutte implicite (§. 26.) nella possibilità di ritrovare un valore di p che sodisfaccia all'equazione $dp = \rho d\psi$.

34. Prima però d'inoltrarci in queste speciali ricerche, giova osservare che l'equazione (4'), cioè $p = \int \rho S ds$, e la sua integrale (5) ci portano alle seguenti conclusioni, le quali per essere ovvie, battendo una strada inversa, potevano esse sole condurci alle equazioni che esprimono le condizioni di equilibrio di una massa fluida qualsivoglia.

Prendiamo a considerare una molecula di un fluido equilibrato situata in m, ed indichiamo con S la forza motrice che l'anima secondo la direzione $m\,s$. Si prenda su questa direzione una molecula m' infinitamente prossima ad m, ed $m's'$ indichi la direzione della forza S' che la sollecita, la quale sarà infinitamente poco inclinata alla $m\,s$. Considerando quindi un punto m'' sulla direzione $m'\,s'$, vicinissimo ad m' ed indicando con $m''s''$

la direzione della forza S'' corrispondente alla molecula ivi situata, e così procedendo di seguito, si verrà a tracciare nel fluido una serie di molecule che prenderemo per un filamento continuo, la cui sezione trasversale, minore di qualunque assegnabile, potrà considerarsi costante o variabile, ed eguale a $d\omega$; e l'elemento di volume di questo filo sarà espresso da $d\omega ds$, sicchè il prodotto $S\rho d\omega ds$ indicherà la forza motrice che lo anima.

35. Avendosi dunque l'equazione

$$\rho S ds d\omega = d\omega dp$$

ne indurremo, che un elemento $m\,m'$ di questo filo deve essere in equilibrio e dipendentemente dalla forza $\rho S d\omega ds$ che lo anima, e dalla differenza delle pressioni opposte p, e $p + dp$ che hanno luogo ai suoi estremi. Di più si può osservare che questo filamento è sempre perpendicolare alle successive superficie di livello, e che la variazione di pressione normalmente ad esso è sempre nulla.

36. Se la densità dell'elemento $m'\,m$ diventasse ρ' maggiore o minore di ρ rimanendo tutto l'altro fluido all'intorno invariabile, la pressione esteriore a questo filamento non cangerebbe; quindi nel caso di $\rho' < \rho$ si avrebbe $\rho' S ds < dp$, e nella supposizione di $\rho' > \rho$, $\rho' S ds > dp$; perciò l'elemento concepirebbe, nel primo caso, un moto in senso opposto alla forza S, nel secondo un moto nel senso della forza stessa. Laonde se l'elemento $m\,m'$, che porremo di egual lunghezza di $m'\,m''$, va ad occupare il posto di questi, e viceversa l'elemento $m'\,m''$ prende la posizione del primo, e sia $d\rho$ una quantità positiva, il primo elemento tenderà a rialzarsi, ed il secondo ad abbassarsi per riprendere ciascuno la primitiva posizione. Ma se $d\rho$ è una quantità negativa, cioè se la densità scema al crescere di s; effettuata, la mutazione di posto indicata, tenderà sempre più l'elemento $m'\,m''$ a rialzarsi, e l'elemento $m\,m'$ ad abbassarsi, sicchè nel caso di $d\rho$ positivo, l'equilibrio era stabile, nel caso di $d\rho$ negativo, l'equilibrio è instabile.

37. Si noti che la formula (4') dimostra che dp è sempre dello stesso segno di Sds; e Sds, è positivo quando si passa da un punto m ad un punto m' situato verso la direzione ms della S.

E perciò trattandosi di un liquido attratto da un centro fisso la pressione cresce sempre accostandosi al centro d'attrazione, ed è diretta verso il medesimo.

CAPITOLO III.

Dell' Equilibrio de' liquidi

38. Incominciando dai fluidi incomprensibili ed omogenei, osserveremo che in tal caso ρ è una quantità costante, e per ipotesi, essendo $d\psi$ un differenziale esatto, lo sarà pure dp, sicchè (§. 33.) sussisterà sempre la possibilità dell'equilibrio del dato liquido quando si disponga in guisa che alla sua superficie libera (che supporremo non premuta o premuta equabilmente) le molecule siano animate da forze motrici la cui risultante insista normalmente alla superficie stessa.

39. Prendiamo ad esaminare una massa fluida attratta da un punto fisso con una forza espressa da $F(r)$ funzione della distanza r che separa una molecula qualunque attratta, dal punto attraente. Avendosi $d\psi = Xdx + Ydy + Zdz = F(r)dr$ si otterrà tosto

$$p = \rho \int F(r)dr + cost. \tag{11}$$

e l'equazione della superficie di livello cioè la $F(r)dr = 0$ si ridurrà semplicemente alla

$$dr = 0 \quad \text{da cui} \quad r = C$$

e a questa stessa equazione giungere immediatamente potevasi partendosi dalla $ds = 0$ che nel nostro caso convertesi nella $dr = 0$.

Dedurremo quindi dalle ritrovate formule il notabile resultato, che qualunque sia la legge di attrazione verso un punto fisso le superficie di livello del liquido attratto, compreso la superficie libera, saranno tutte sferiche, e col centro comune situato nel punto attraente.

40. La costante C può determinarsi in guisa che la $r = C$ rappresenti realmente la superficie libera quando si conosca il vo-

lume V del dato liquido. Infatti dovrà essere $V=\frac{4\varpi C^3}{3}$ donde si trae $C=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V}{\varpi}}$.

41. Sia l'attrazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e chiamiamo $-g$ questa forza alla superficie libera dove si ha $r=C$, e dove supporremo $p=P$; si avrà evidentemente $-g : F(r) :: \frac{1}{C^2} : \frac{1}{r^2}$ onde $F(r)=\frac{-gC^2}{r^2}$ e perciò

$$p-P=\rho g\frac{C}{r}(C-r) \tag{12}$$

42. Se i fluidi sono incompressibili, ma eterogenei, perchè sussista l'equazione $dp=\rho d\psi$ conviene che la densita sia una funzione di ψ, onde si avrà $\rho=F(\psi)$ e $p=\int F(\psi)d\psi$. La funzione $F(\psi)$ può essere continua o discontinua; ma per tutti i valori costanti di ψ essa conservasi la medesima; e siccome questi valori corrispondono alla $d\psi=0$, conviene inferirne che per tutte le superficie di livello la densità deve al pari della pressione, rimanere invariabile.

Può quindi un liquido eterogeneo attratto da un centro fisso restare equilibrato disponendosi in tanti strati liquidi uniformemente densi compresi da tante superficie di livello concentriche; e soltanto gioverà osservare che avendo supposta la forza attrattiva, conviene che gli strati più densi sieno per la stabilità dell'equilibrio sempre più vicini al centro di attrazione.

3. Se il centro attraente fosse infinitamente lontano, come accade della gravità agente sopra una massa liquida non molto estesa, questi strati sarebbero paralelli fra loro, e normali alla direzione della forza attraente; di più dovrebbero essere disposti in guisa che la densità dall'alto al basso andasse continuamente crescendo; se questa condizione non si avverasse l'equilibrio sussisterebbe, ma sarebbe instabile.

44. A proposito di una massa liquida attratta da un centro fisso, si potrebbe credere che levandone internamente una porzione compresa fra il centro e una superficie di livello, tutta la residua massa liquida contenuta fra la superficie sferica convessa esterna, e la superficie concava concentrica interna dovesse rimane-

re equilibrata, ad onta che in quest' ultima superficie rimasta libera, la pressione fosse diretta verso il centro tendendo a scostare le molecule liquide dalla superficie medesima.

E si potrebbe credere che l' eqilibrio dovesse sussistere, perchè l' attrazione delle molecule situate in questa superficie concava interna, essendo eguale per tutte, dovrebbero esse ubbidirvi contemporaneamente; il che è impossibile senza ammettere, contro l' ipotesi, una diminuzione di volume nel liquido.

Ma quantunque questo equilibrio sembrar potesse a taluni astrattamente possibile, e quindi indur ne volessero che non essendo necessario che alla superficie libera la pressione, ossia la resultante delle forze, sospinga contro essa superficie le molecule ivi situate, pure credo che ciascuno di buona voglia giudicherà che fisicamente parlando non è un tale equilibrio ammissibile; e non vorrà perciò solo risguardare come incompleta la Statica de' liquidi.

Anche un filo flessibilissimo e non elastico avvolto circolarmente sopra se stesso potrebbe sembrare, secondo l' esposto concetto teorico, suscettibile di essere equilibrato da forze eguali e normali al medesimo dirette al centro del circolo, ma non per questo si dovrà menomamente dubitare della necessità della generale condizione di equilibrio, che le forze che incurvano il filo sieno dirette dalla parte della convessità della linea in cui esso si dispone.

45. Le proprietà dell'equilibrio dei liquidi pesanti possono, come già ne abbiamo veduto l' esempio, dedursi immediatamente da quelle che abbiamo ritrovate pei liquidi attratti da un centro fisso supponendolo infinitamente lontano.

Più liquidi pesanti racchiusi in un vaso saranno quindi in equilibrio allorchè la superficie libera, e le loro superficie di separazione siano normali alla direzione della gravità, ossia quando dispongansi in tanti strati orizzontali; e questo equilibrio non sarà turbato premendo uniformemente la superficie libera. La stabilità dell' equilibrio esigerà inoltre che gli strati più densi siano successivamente i più bassi; e questa condizione corrisponde alla legge generale dell' equilibrio stabile di un sistema di gravi quando il comun centro di gravità è nella posizione infima.

46. La pressione riferita all' unità superficiale non varierà per tutta l' estensione delle diverse sezioni orizzontali che tracciar si possono nell' interno del liquido; e trattandosi di un solo liquido omogeneo, per una sezione esistente alla profondità z dal livello superiore, si avrà evidentemente la pressione p espressa dalla formula $p-P=\rho g\frac{C}{r}(C-r)$ del §. 37. nella quale si porrà $\frac{C}{r}=1$ e $C-r=z$ per cui trasformasi nella $p=P+\rho gz$.

Una tal formula poteva immediatamente dedursi dalla integrazione della $dp=\rho gdz$ in cui si converte la (4') nel caso di $S=g$, e di $ds=dz$. E quest' ultima darà la pressione anche trattandosi di più liquidi sovrapposti, poichè in tal caso dovendo essere $\rho S=gF(z)$ si ha $p=g\int F(z)dz+P$, rappresentando $F(z)$ una funzione continua o discontinua.

47. La costante P che esprime la pressione corrispondente alla superficie libera, generalmente parlando, non è che la pressione atmosferica che deve aggiungersi alla pressione variabile dovuta alla gravità del liquido, per ottenere in un punto qualunque della data massa la total pressione. Gioverà però a maggior semplicità farne astrazione, potendosi sempre riprodurla facilmente nei resultati dei calcoli che andremo sviluppando. In tale ipotesi avremo quindi l' equazione $p=\rho gz$.

48. La pressione del liquido sopra una piccolissima superficie $d\omega$ posta alla profondità z dal piano superiore, esprimendosi con $pd\omega=\rho gzd\omega$, equivarrà al peso di un prisma dello stesso liquido avente per base la superficie medesima, e per altezza la di lei profondità sotto il piano di livello.

49. Volendo calcolare la totale pressione Π esercitata dal liquido contro un piano ω, il cui centro di gravità sia alla profondità Z del piano supremo, avremo $\Pi=g\rho\int zd\omega=g\rho Z\omega$, eguale cioè al peso di una colonna prismatica liquida avente per base il dato piano, e per altezza la profondità Z del suo centro di gravità. Ruotando quindi il piano attorno questo centro, la pressione totale non varia.

50. Calcolando questa pressione Π contro il fondo orizzontale, su cui insista il liquido ad un altezza h, qualunque sia la for-

ma del vaso avremo $\Pi = g\rho a h$, che precisamente eguaglia il peso del liquido contenuto in un vaso prismatico ed elevato sulla base stessa dell'altezza h. Si rende quindi palese come una sottile colonna liquida dilatandosi in ampia falda sopra una base molto estesa possa esercitare contro essa un'enorme pressione di gran lunga superiore al proprio peso.

51. Questo fenomeno avendo parimente luogo qualunque sia l'inclinazione della superficie su cui si esercita una tal pressione, si riprodurrà anche in un vaso che sia incurvato come nella Fig. 2. figura, ed avente il fondo orizzontale $AB = a$ depresso dal livello supremo della quantità h. La pressione Π contro un tal fondo sarebbe quindi rappresentata da $\Pi = g\rho a h$. Che se AB fosse un fondo mobile ma che chiudesse perfettamente, a guisa di uno stantuffo, la parte sinistra del vaso supposto prismatico, converrebbe che fosse gravato di un peso $\Pi = g\rho a h$ onde il liquido si mantenesse all'altezza h nella parte destra del vaso. Immaginando di più esercitata con un mezzo qualunque una pressione Π' nella suprema superficie b del liquido contenuto nel ramo destro, che supporremo parimente prismatico, sarà $\frac{\Pi'}{b}$ la pressione riferita all'unità superficiale che da essa deriva, onde si avrà contro il fondo a la pressione addizionale $\frac{\Pi' a}{b}$, e perciò dovrà essere

$$(a) \qquad \Pi = \rho g a h + \frac{\Pi' a}{b}.$$

52. Tenendo costante Π' ed aumentando Π di ϖ, ed h di h' avremo

$$\Pi + \varpi = \rho g a (h + h') + \frac{\Pi' a}{b}$$

{ per cui $\varpi = \rho g a h'$.

E qui si osservi che h' si compone dell'elevazione $E'E = x$ aumentata della depressione $AB' = y$; ma siccome per l'invariabilità della massa fluida si ha $bx = ay$ sarà

$$h' = x + y = \left(1 + \frac{b}{a}\right)x$$

e perciò $$\varpi = \rho g a\left(1+\frac{b}{a}\right)x$$

colla quale formula, cognita la x, si può ritrarne il valore di ϖ.

53. Si osservi che allorquando si faccia la sezione b piccolissima in confronto di a il numero $\frac{a}{b}$ diventa grandissimo, quindi un piccolo valore di Π', che è la pressione esercitata nel ramo destro, produce un valore grandissimo di Π nel ramo sinistro; di più si noti che essendo $\frac{b}{a}$ un numero piccolissimo si avrà prossimamente $\varpi = \rho g a x$ e perciò il peso addizionale posto nel coperchio a può esser misurato dal peso di una colonna liquida avente a per base, e per altezza l'inalzamento che succede nel liquido contenuto nel ramo destro.

54. Queste formule oltre contenere la teoria dell'equilibrio nei vasi comunicanti, racchiudono pure la teoria del Barometro che consiste, generalmente parlando, in un tubo ricurvo ripieno di mercurio che si inalza diversamente nei due rami verticali del tubo stesso, perchè da una parte il tubo essendo chiuso e privo d'aria non ha luogo veruna pressione superficiale; e dall'altra essendo aperto vi agisce la pressione atmosferica.

Chiamando quindi $\frac{\Pi}{a}$ la pressione atmosferica che si esercita in a contro l'unità superficiale, e detta m la densità del mercurio, e fatto $\Pi'=0$ avremo $\frac{\Pi}{a}=mgh$, e aumentato di $\frac{\varpi}{a}$ la pressione atmosferica si avrà

$$\frac{\varpi}{a}=mgh'=mg\left(1+\frac{b}{a}\right)x$$

sarà quindi per un altro aumento di pressione indicato da $\frac{\varpi'}{a}$

$$\varpi : \varpi' :: x : x'$$

ossia le differenze di pressione atmosferica saranno proporzionali alle elevazioni del mercurio nel ramo destro. Che se $\frac{b}{a}$ è numero piccolissimo l'elevazione in questo ramo moltiplicata per mg misurerà prossimamente l'assoluto peso corrispondente all'aumentata pressione atmosferica riferita all'unità superficiale. Di qui la ragione della grande ampiezza del pozzetto in confronto del tubo; o della mobilità del livello del pozzetto medesimo per ricondurlo sempre alla stessa situazione; o della doppia scala nei Barometri a Sifone composti di due rami di egual diametro.

55. Se nell'equazione (a) si supponga $\frac{\Pi}{a}=\frac{\Pi'}{b'}$, si reputino cioè egualmente premute le superficie nell'uno, e nell'altro vaso comunicante, avremo evidentemente $h=0$, per cui i liquidi dovranno disporsi allo stesso livello.

56. Le pressioni Π e Π' possono resultare da tanti liquidi sovrapposti, che per la stabilità dell'equilibrio supporremo con densità decrescenti; e chiamando $\rho', \rho'', \rho''', \ldots k', k'', k''' \ldots$ le densita, e le altezze corrispondenti ai liquidi sovrapposti alla supercie a nel primo ramo, e $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots k_1, k_2, k_3 \ldots$ le quantità analoghe relative ai liquidi insistenti sulla superficie b nel secondo ramo, dovra essere

$$\Pi=ga(\rho'k'+\rho''k''+\ldots.),\ \Pi'=gb(\rho_1k_1+\rho_2k_2+\ldots.)$$

onde la (a) trasformasi nella

$$\rho'k'+\rho''k''+\ldots.=\rho h+\rho_1k_1+\rho_2k_2+\ldots.$$

57. Che se il liquido inferiore trovasi allo stesso livello nei due rami, per cui abbiasi $h=0$, dovrà essere

$$\rho'k'+\rho''k''+\ldots.=\rho_1k_1+\rho_2k_2+\ldots$$

e trattandosi di due liquidi di densità differente sovrapposti nell'uno e nell'altro ramo alle superiori superficie, esistenti nello stesso piano orizzontale del liquido più basso, avremo $\rho'k'=\rho_1k_1$; per cui le altezze di questi liquidi saranno in ragione inversa delle loro densità. Immaginando tracciato un piano orizzontale che intersechi i liquidi di differente densità nei due rami del sifone, non potrà quindi in generale asserirsi che eguale pressione e densità vi debba corrispondere.

CAPITOLO IV.

Del centro di pressione.

58. Si chiama centro di pressione in un piano premuto da un liquido pesante quel punto per cui passa la risultante di tutte le pressioni esercitate sopra ciascuno dei suoi elementi; e sostenuto quel punto da una forza eguale e contraria alla risultante suddetta, il piano sarà sostenuto contro la spinta del fluido. Queste pressioni essendo tutte al piano normali, ne conseguita che il punto suddetto può risguardarsi come centro di tante forze parallele, eguali respettivamente alle pressioni tutte sofferte dai punti del piano dato. E siccome più sono profondi questi punti, e tanta maggior pressione risentono, così è manifesto che il centro di pressione in un piano immerso ed inclinato, rimane più basso del centro di gravità, cioè di quel punto per cui passerebbe la risultante di tante forze parallele eguali per tutti gli eguali elementi del dato piano. Coincideranno però questi due centri quando il piano premuto sarà orizzontale.

59. Abbiasi una superficie piana che possa suddividersi in elementi trasversali compresi fra tanti piani orizzontali, i quali elementi sieno tutti simmetrici intorno ad un asse rettilineo AK, inclinato alla verticale dell'angolo α che prendesi per asse delle x coll'origine in A. Prolunghisi questa retta fino in L a intersecare la superficie suprema RL del liquido, e si assumino le y orizzontali. Facendo $AL=h$, $AK=k_1$, $AP=x$, $Ap=x+dx$, $PM=y$, $pm=y+dy$, l'area elementare $MM'mm'$ sarà espressa da $fydx$ dove f è un coefficiente costante ed eguale a $2\text{sen}\widehat{xy}$. Il centro di pressione di un tale elemento egualmente premuto in tutta la sua lunghezza cadrà evidentemente sovra l'asse AK attorno cui è simmetrico, e nello stesso asse cadendo pure i centri parziali di pressione di tutti gli altri elementi, il centro di pressione dell'intiera superficie esisterà sicuramente sull'asse stesso ad una distanza χ dal punto A. La pressione esercitata sull'elemento superficiale $fydx$ essendo dovuta all'altezza del liquido $(x+h)\text{sen}\alpha$ sarà espressa da $gf\rho(x+h)ydx\text{sen}\alpha$, e il momento di questa pressione che può supporsi applicata in p, sarà, rispetto al punto A Fig. 3

$$gf\rho\operatorname{sen}\alpha(x+h)xydx$$

si avrà quindi l'equazione

$$\chi gf\rho\operatorname{sen}\alpha\int_0^k(x+h)ydx=gf\rho\operatorname{sen}\alpha\int_0^k(x+h)xydx$$

da cui
$$\chi=\frac{\int_0^k(x+h)xydx}{\int_0^k(x+h)ydx}$$

60. Se $h=0$ cioè se la superficie ha l'ordinata suprema a fior d'acqua si ottiene

$$\chi=\frac{\int_0^k x^2ydx}{\int_0^k xydx}$$

il qual valore è indipendente dall'angolo α.

61. Se $h=\infty$, cioè se la superficie immersa è orizzontale, oppure profondissima, si avrà

$$\chi=\frac{\int_0^k xydx}{\int_0^k ydx}$$

(*M.* §. 89.), coinciderà perciò il centro di pressione col centro di gravità come si era dianzi avvertito.

62. Se il piano immerso è un trapezio coi lati paraleli e orizzontali, e il superiore pongasi eguale a $2n$, e l'inferiore a $2m$ sarà $y=\frac{m-n}{k}x+n$; onde sostituendo, e integrando si otterra
$$\chi=\frac{k}{2}\,\frac{(3m+n)k+2(2m+n)h}{(2m+n)k+3(m+n)h}$$

che riducesi a $\chi=X=\frac{2m+n}{m+n}\cdot\frac{k}{3}$ quando pongasi $h=\infty$, con che si confonde il centro di gravità con quello di pressione. Se $h=0$,
$$\chi=\frac{3m+n}{2m+n}\cdot\frac{k}{2}$$

onde per un parallelogrammo avente un lato a fior d'acqua

$\chi=\frac{2}{3}k$, cioè a due terzi della retta che unisce la metà del lato supremo coll' opposto inferiore. E per un triangolo col vertice a fior d'acqua e la base $2m$ volta in basso si avrà $n=0$, e quindi $\chi=\frac{3}{4}k$, e perciò ai tre quarti della retta che unisce il vertice colla metà della base. Che se finalmente il triangolo fosse colla base a fior d'acqua, e col vertice volto in basso si porrebbe $m=0$ onde $\chi=\frac{1}{2}k$; quindi il centro di pressione corrisponderebbe al mezzo della retta che dal vertice si conducesse alla metà della base.

63. Se una parete piana di un vaso pieno di liquido fosse mobile, converrebbe per l'equilibrio applicare al di lei centro di pressione una forza eguale e contraria alla risultante delle pressioni elementari da essa sofferte.

64. Se la superficie premuta che proseguiremo a indicare con ω fosse curva, sicchè le pressioni elementari esercitate sulla medesima non riuscissero più tra loro parallele, converrebbe decomporle tutte parallelamente a tre assi ortogonali, per ridurle poscia, quando fosse possibile, ad una risultante unica, o in tutti i casi almeno, ad un sistema di due forze.

Quando esiste il punto d'applicazione della resultante delle pressioni chiamasi, anche in questo caso, *centro di pressione.*

65. Siano x, y, z le coordinate variabili della superficie premuta, e il piano delle xy si prenda alla superficie libera del liquido; sicchè la z indichi la profondità sotto il livello supremo di un elemento superficiale $d\omega=Mdxdy$ (*M.* §. 89.). E poichè la pressione contro un tale elemento si rappresenta con $pd\omega$, richiamando le considerazioni del §. 22. e seguenti, avremo evidentemente le somme delle componenti ortogonali di tutte le pressioni elementari espresse dai seguenti integrali dupli estesi a tutta la superficie premuta

$$\iint pdzdy, \qquad \iint pdzdx, \qquad \iint pdxdy$$

Supponiamo ora che questa superficie appartenga a un solido totalmente immerso in un liquido, e cominciando dal considerare il primo di questi integrali osserveremo, che se si immagina tracciato un cilindro da una generatrice parallela alle x, e che tocchi tutto all'intorno la data superficie, rimarrà così divisa in due parti, e le normali agli elementi dell'una formeranno degli angoli acuti, e le normali agli elementi dell'altra degli angoli ottusi coll'asse delle x; sicchè indicando con p, p_1, le pressioni corrispendenti a due opposti elementi situati nelle due superficie (a due elementi cioè, che abbiano eguale projezione $dzdy$ nel piano zy) potremo scrivere il suddetto integrale convenientemente definito nel modo seguente

$$\int\int(p-p_1)dzdy$$

e ragionando analogamente sugli altri due integrali, ci persuaderemo che equivalgono a $\int\int(p-p_2)dzdx$, ed $\int\int(p-p_3)dxdy$; essendo p_2, p_3 le pressioni corrispondenti a due elementi superficiali opposti al $d\omega$ nel senso delle y e delle z, aventi respettivamente al pari di esso, le projezioni $dzdx$, $dxdy$, il primo nel piano zx, il secondo nel piano xy.

66. Ora egli è evidente che se la pressione contro il corpo immerso, riferita all'unità superficiale, fosse costante per tutto il contorno del corpo immerso si avrebbe $p=p_1=p_2=p_3$, onde questi tre integrali dupli riescirebbero nulli, essendo composti di tante forze eguali ed opposte che due a due si distruggerebbero. Concludiamo dunque che un corpo i cui elementi di superficie eguali fossero animati da forze eguali e normali, rimarrebbe in equilibrio qualunque ne fosse la forma.

67. Che se la pressione è costante solamente per tutti gli elementi situati nello stesso piano orizzontale, come accade dei corpi immersi nei liquidi gravi, avremo $p=g\rho z$; laonde le pressioni p, p_1, p_2 corrispondendo ad elementi posti alla stessa profondità dal piano di livello, saranno tra loro eguali, e perciò i due primi integrali si ridurranno a zero.

Il terzo poi, indicando con z_1 la profondità dell'elemento superficiale verticalmente e inferiormente opposto al $d\omega$, e che corrisponde alle ordinate x, y e alla pressione p_3 si trasformerebbe in

$$\rho g\int\int(z-z_1)dxdy$$

E poichè $\int\int(z_1-z)dxdy$ è il volume del corpo immerso, ben si vede che l'antecedente integrale moltiplicato per ρg rappresenterà il peso di un pari volume del dato liquido, preso negativamente; onde dovremo concludere che la risultante delle pressioni contro un corpo totalmente immerso è eguale, ed opposta al peso della massa fluida spostata.

68. Se dunque esprimeremo con $dV'=dx'dy'dz'$ l'elemento di volume del corpo immerso, omogeneo, o eterogeneo, e con ρ' la sua densità, sarà $g\int\int\int\rho'dV'$ il suo peso, e perciò dovrà sussistere delle (2) la sola equazione

$$\int\int\int\rho'dV'=\rho\int\int(z'-z)dxdy$$

Sarà di più necessario che sussistano le (3) quando in esse pure si ponga $Y'=X'=0$, $Z'=g$, e quando si avverta che per gli esposti valori di p sono nulli gli integrali

$$\int\int(p-\rho_1)xdxdz \qquad \int\int(p-p_1)ydydz$$

e con ciò esse diverranno

$$\int\int\rho'y'dV'=\rho\int\int y(z_1-z)dxdy$$
$$\int\int\rho'x'dV'=\rho\int\int x(z_1-z)dxdy$$

e se x_1, y_1 sono le coordinate del centro di gravità del volume immerso, ed $\bar{x}$ $\bar{y}$ quelle del liquido spostato, chiaro ne emerge che queste equazioni si trasformano nelle seguenti $x_1=\bar{x}$, $y_1=\bar{y}$, le quali ci indicano dovere esistere questi due centri di gravità nella stessa verticale.

69. Può essere che la superficie data non sia premuta in tutta la sua estensione, come accade di un corpo che poggi nel fondo del vaso o che non sia totalmente sommerso, e limitandoci in tale ipotesi ai corpi e al liquidi gravi, vedremo che le componenti delle pressioni nel senso verticale, non ne avranno delle corrispondenti opposte esercitate sopra altri elementi; sicchè indicando con x_2, y_2, z_2 le coordinate della porzione di superficie che non rimane premuta converrà all'integrale $g\rho\int\int(z_1-z)dxdy$ aggiungere o togliere il termine $g\rho\int\int z_2dx_2dy_2$ secondo che la superficie non premuta apparterrà alla superiore o all'inferiore di quelle che corrispondono ai limiti dell'integrale duplo.

Si avrà quindi l'intiera pressione verticale espressa da

$$-g\rho\left(\int\int(z_1-z)dxdy\pm\int\int z_2dx_2dy_2\right)$$

e varrà il segno superiore per i corpi di cui una parte esiste fuor d'acqua, e l'inferiore per quelli che toccano esattamente per una certa estensione il fondo del vaso. Ma poichè nel caso della superficie non del tutto sommersa corrisponde questa a delle z_2 negative, l'ultimo termine si dovrà considerare sottrativo in ambedue le ipotesi.

70. Si vede dunque che nel primo caso il corpo è premuto all'insù da una forza eguale e direttamente opposta al peso della massa fluida spostata, nel secondo da una forza eguale al peso della massa fluida spostata, diminuita del peso di una colonna fluida avente per base la superficie a contatto al fondo del vaso, e per altezza, l'altezza del liquido sopra la medesima.

71. I risultamenti ottenuti relativamente ai corpi, o in parte o del tutto immersi potevano dedursi dalla seguente ovvia considerazione. Fingiamo di aver un liqido grave equilibrato entro un vaso, e supponiamo che una porzione qualunque di esso si congeli; l'equilibrio del sistema non verrà per questo turbato perchè sappiamo (*M.*§.156.) che le condizioni che assicurano l'equilibrio dei liquidi sono esuberanti per quello de' solidi. Ma se l'equilibrio non si turba è d'uopo che la resultante delle pressioni del fluido contro la superficie della massa congelata sia eguale e direttamente opposta al peso della massa stessa.

E poichè le pressioni del liquido contro la superficie del volume liquido congelato sono le stesse che si eserciterebbero contro qualunque altro solido eguale che si ponesse in suo luogo; così la risultante delle pressioni del fluido contro un solido immerso, è eguale e direttamente opposta al peso di un pari volume di fluido, al peso cioè della massa fluida spostata dal corpo.

72. La risultante delle pressioni di un liquido grave equilibrato contro le pareti ed il fondo di un vaso che lo contiene, equivale al peso del fluido stesso, e ciò si prova con dimostrazione analoga a quella del §. 65.

Assumendo infatti come allora il piano xy nel piano supremo di livello, e indicando con $pd\omega=gzd\omega$ la pressione esercitata normalmente e dall' indentro all' infuori contro l' elemento $d\omega$ delle pareti, corrispondente alle coordinate x, y, z, si avrebbero le somme delle componenti delle pressioni parallele alle x ed alle y espresse dagli integrali.

$$\int\int(p_1-p)dydz\,,\qquad \int\int(p_2-p)dxdz$$

quantità nulle per essere $p=p_1=p_2$, come pressioni esercitate contro elementi egualmente profondi al di sotto del livello supremo.

Le pressioni verticali sarebbero poi rappresentate da

$$\int\int(p_3-p)dxdy=\rho g\int\int(z_1-z)dxdy$$

e siccome questo integrale deve estendersi a tutta la superficie del liquido a contatto colle pareti, e col fondo del vaso, e di più vi si può anche aggiungere la superficie libera per cui le z sono nulle, così ne conseguita che rappresenta il peso totale del liquido contenuto nel dato vaso.

73. Alla medesima conclusione giunger si poteva osservando, che le pressioni esercitate da una massa liquida grave contro le pareti di un dato vaso sarebbero eguali e contrarie alle pressioni che eserciterebbe un liquido della stessa natura, e contenuto in un vaso maggiore, contro un corpo di egual figura e volume del liquido contenuto nel primo vaso, e supposto immerso nel secondo fino alla coincidenza de' livelli supremi.

74. Dalle cose anzidette apparisce che per l'equilibrio de' corpi immersi in tutto o in parte richiedesi, che il centro di gravità del galleggiante, e del volume d' acqua spostato siano nella stessa verticale, e che il peso di quello sia eguale al peso di questo; sicchè chiamando W e δ il volume e la densità del galleggiante, e V e ρ il volume e la densità del liquido spostato, debba essere

$$W\delta=V\rho$$

75. Ma per la stabilità di codesto equilibrio un' altra condizione pure è necessaria, e siccome il galleggiante, e il liquido non formano che un sistema di corpi gravi, così (*M.* §. 234.) conviene che il centro comune di gravità sia il più basso possibile.

Fig. 4. Rappresenti *AB* il livello del liquido, e *MNM'* un grave immerso nel medesimo e in equilibrio. Sia *G* il centro di gravità di questo corpo esistente nella sezione verticale *MM'N*, e precisamente nella retta verticale *NN'*, in cui pure deve essere situato il centro di gravità *H* del volume del liquido spostato. Indichiamo con ζ la profondità del centro di gravità di tutto il sistema, (cioè del liquido contenuto nel vaso, e del corpo immerso) al disotto del piano orizzontale arbitrario *XY*, e con z la profondità di *G* e con h la profondità di *H*. Sia V il volume del liquido spostato; e $\rho V = m$ ne rappresenti la massa che deve eguagliare quella del corpo immerso.

Se M è la massa del liquido contenuto nel vaso, ed a la profondità del centro di gravità del liquido stesso, a cui se ne supponga aggiunto tanto da riempire il volume *ABN* avremo evidentemente

$$(M+m)\zeta = (M+m)a - mh + mz$$

e perciò
$$\zeta = a + \frac{\rho V}{m+\rho V}(z-h)$$

Immaginando ora impresso al corpo un menomo spostamento arbitrario, e indicando con V' il volume che in questa posizione resta sommerso, ed *A'B'* il nuovo livello del liquido avremo

$$(M+\rho V')\zeta' = (M+\rho V')a' + \rho V z' - \rho V' h'$$

quando ζ', a', z', ed h' rappresentino quantità analoghe alle precedenti ma relative alla nuova situazione del corpo. Designando quindi con α la distanza dal piano *XY* del centro di gravità dello strato liquido di volume $V' - V$ corrispondente al variato supremo livello potremo scrivere

$$(M+\rho V')a' = (M+\rho V)a + \rho(V'-V)\alpha;$$

onde, sostituendo nel valore di ζ', otterremo

$$\zeta' = a + \frac{\rho V z' - \rho' V' h + \rho(V'-V)\alpha}{M+\rho V}$$

E perchè ζ sia massima converrà che la differenza $\zeta' - \zeta$ abbia i termini di primo ordine nulli, e quelli di secondo sempre negativi.

76. Se si suppone tanto grande il recipiente che ne rimanga invariabile il piano supremo di livello alle differenti immersioni del dato corpo, prendendo questo piano per quello delle AY si porrà $\alpha = 0$, e perciò

$$\zeta' = a + \frac{\rho V' z' - \rho V h'}{M + \rho V}$$

77. Chi supponesse lo spostamento e la figura del corpo tali da potersi considerare il volume $V' - V$ come un cilindro verticale compreso fra le due sezioni $A'B'$, AB normale l'una, inclinata l'altra all'asse del cilindro stesso, vedremo in seguito come facilmente calcolare si possa il valore di $V' - V$ e di h' e quindi esprimere analiticamente la condizione della stabilità dell'equilibrio del dato corpo. Ma per ora ci contenteremo di osservare che se passando il corpo dalla posizione d'equilibrio ad un'altra vicinissima, il volume liquido spostato non cangia; cioè se $V' = V$ basterà allora che $a + \rho V(z' - h')$ sia sempre minore di $a + \rho V(z - h)$, onde allorchè $z > h$, la condizione della stabilità dell'equilibrio si ridurrà semplicemente al dover diminuire per ogni spostamento del corpo la differenza d'altezza fra i centri di gravità del corpo stesso, e del volume spostato. Che se $z < h$ sarà invece necessario che questa differenza cresca per ogni spostamento.

78. Nel particolar caso di $V' = V$, e nella supposizione ancora della perfetta simetria del corpo, e per la densità, e per la forma rispetto alla sezione verticale ABN, se accade una minima rotazione attorno ad un asse orizzontale normale alla sezione stessa, si suol riconoscere la stabilità dell'equilibrio dalla posizione di un certo punto che chiamasi *metacentro*. Le forze infatti che animano il corpo nella seconda posizione essendo due eguali ed opposte, la spinta cioè del fluido agente in H', che è il centro di gravità del volume liquido spostato nella seconda immersione, e il peso del corpo applicato in G, dovremo tener conto della sola forza che agisce in H' dal basso all'alto secondo la retta $H'O$, e che tenderà a far ruotare il corpo intorno a G. Il punto O d'incontro della direzione di questa forza coll'asse AB chiamasi *metacentro*; e se G cade sotto di H questa tendenza sarà sempre volta a ricondurre il corpo nella posizione di equilibrio, così pure Fig. 5.

se G coincide con H, o sia anche più alto di H ma inferiore ad O. Che se finalmente G è più alto del più volte mentovato *metacentro*, allora la pressione del fluido che agisce secondo $H'O$ tenderà sempre più ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio. Nel caso poi in cui il *metacentro* coincidesse col punto G il corpo rimarrebbe in equilibrio anche nella seconda posizione.

79. Non sarà fuor di luogo in un particolar caso il determinare le leggi delle minime oscillazioni d'un corpo galleggiante spostato dalla sua posizione d'equilibrio.

Sia a tale oggetto IL il livello costante del liquido, ed MNP Fig. 6. rappresenti una sezione verticale di un corpo galleggiante in equilibrio in cui è tracciata la AP parimente verticale e sulla quale devono essere situati i punti G, ed H, centri di gravità respettivi, e del corpo dato, e del volume fluido spostato.

Si immagini impresso al corpo un tale menomo spostamento che il suo centro di gravità scenda di una quantità σ' mentre tutto il corpo ruota intorno ad un asse orizzontale che passa pel centro G ed è normale alla sezione MNB; inclinandosi così la AP di un angolo ψ' alla primitiva posizione verticale.

Supponiamo di più per maggior semplicità che il centro di gravità del volume spostato cada (avvenuto questo cangiamento di posizione) in un punto della stessa sezione verticale MNB, talchè il corpo abbandonato a se stesso, ed animato del proprio peso in G, e dalla spinta verticale del liquido applicata al centro di gravità del nuovo volume spostato concepisca un movimento tale, che il suo centro di gravità G progredisca verticalmente, come se il suo peso e la spinta del liquido vi fossero immediatamente applicati; e un moto rotatorio intorno all'asse che passa per G, come se questo punto fosse fermo.

Trascorso il tempo t dopo avere abbandonato il corpo a se stesso si trovi esso in tale posizione che la figura MNP sia passata in mnp, e si indichino colle lettere g, h i punti corrispondenti a G ed H; facciansi poi le seguenti posizioni e convenzioni

Volume $MNP = mnp = V = \frac{M}{\rho}$

M massa del galleggiante

ρ densità del liquido

g gravità ossia peso dell' unità di massa.
Volume $slp = V'$.
$GH = gh = a$, $AG = ag = c$.

$$\left.\begin{array}{l} Gg = \sigma \\ \text{Angolo } Aga' = \psi \end{array}\right\} \text{ quantità piccolissime.}$$

λ superficie piana projettata in MN, ed anche in mn.
$Ag = z_1 = c + \sigma$.

$$a'g = (c+\sigma)\frac{1}{\cos.\psi} = (c+\sigma) + (c+\sigma)\frac{\psi^2}{2} = c + \sigma \text{ prossimamente.}$$

$$aa' = a'g - c = \sigma + (c+\sigma)\frac{\psi^2}{2} = \sigma \text{ prossimamente.}$$

Angolo $aqq' = 90^\circ$, $aq = x$, $qq' = y$.
H' centro di gravità del volume V'.
h' centro di gravità del volume $slmn$.

$$\left.\begin{array}{l} H'O \\ f'h' = \alpha \end{array}\right\} \text{ rette verticali } \left.\begin{array}{l} Or = m \\ fh' = \beta \end{array}\right\} \text{ rette orizzontali.}$$

$$qv = \frac{y}{2},\ vv' = k = \frac{y}{2}\,\text{sen.}\psi + x\cos.\psi + c\,\text{sen.}\psi.$$

O metacentro.

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \text{velocità angolare del mobile.}$$

$\rho V k^2 = M k^2 =$ momento d' inerzia del corpo intorno all' asse orizzontale che passa per G.

80. Posto ciò per il moto del centro di gravità, dove immaginasi raccolta la massa $M = \rho V$, avremo:

$$M\frac{d^2 z_1}{dt} = \rho g(V - V').$$

ossia

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g(V - V')}{V}$$

e pel moto rotatorio

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = g\,\frac{(V - V')\beta \pm V a\,\text{sen.}\psi}{V k^2}$$

$$= g\,\frac{(V - V')\beta \pm V a\psi}{V k^2}$$

e si prenderà il segno superiore o il segno inferiore secondo che il punto G cade sopra o sotto il punto H.

Siccome, indicando con $d\lambda$ un elemento della superficie projettata in mn corrispondente all' ascissa x, ed alla ordinata y, può ritenersi il volume $V'-V=\int yd\lambda$, risguardandolo come composto di tanti prismetti aventi $d\lambda$ per base ed y per altezza; così riferendo i momenti a un piano verticale condotto per l'asse AP normalmente al piano della figura si avrà

$$(V'-V)\beta=\int(c\,\text{sen}.\psi+x\cos.\psi+\frac{y}{2}\,\text{sen}.\psi)yd\lambda$$

$$=\int(c\psi+x+\frac{y\psi}{2})yd\lambda$$

e poichè $eq'=\frac{y-\sigma}{x}=\text{sen}.\psi$, da cui $y-\sigma=x\psi$, sostituendo e trascurando il ψ^2 e i prodotti di ψ per σ, si otterrà

$$(V'-V)\beta=\psi\int x^2d\lambda-\sigma\int xd\lambda$$

e finalmente

$$V'-V=\int yd\lambda=\sigma\lambda-\psi\int xd\lambda.$$

E perciò le equazioni del moto si trasformeranno nelle seguenti

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=-\frac{g\lambda\sigma}{V}-g\psi\int xd\lambda$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=g\frac{\pm Va\psi-\psi\int x^2d\lambda-\sigma\int xd\lambda}{Vk^2}$$

Se il centro di gravità della sezione λ è projettato in a, sarà $\int xd\lambda=0$, onde si ridurranno alle due più semplici

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=-\frac{g\lambda}{V}\sigma$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{g}{Vk^2}(\int x^2d\lambda\mp Va)\psi$$

nelle quali essendo separate le variabili ψ e σ, se ne concluderà che stante l' ipotesi ammessa il movimento del centro di gravità è indipendente dal movimento rotatorio intorno al medesimo.

Integrandole dunque in guisa che a $t=0$, corrisponda $\sigma=\sigma'$, $\psi=\psi'$, $\frac{d\sigma}{dt}=0$, $\frac{d\psi}{dt}=0$, avremo

$$\sigma = \sigma' \cos. t \sqrt{\frac{g\lambda}{V}}$$

$$\psi = \psi' \cos. \left[\frac{t}{k} \sqrt{\frac{g(\int x^2 d\lambda \mp Va)}{V}} \right]$$

81. Osservando che $c+\sigma$ è l'ordinata verticale del centro di gravità dopo il tempo t, concluderemo dalla prima di queste che il centro suddetto oscilla verticalmente come un pendolo della lunghezza $\frac{V}{\lambda}$. Perchè poi il valore di ψ si mantenga sempre piccolo e periodico al crescere di t (la qual condizione è indispensabile acciocchè l'equilibrio da cui si è allontanato il galleggiante fosse stabile) converrà che l'arco espresso da $\frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(\int x^2 d\lambda \mp Va)}{V}}$ non divenga immaginario; altrimenti il valore di ψ si convertirebbe in esponenziali che crescerebbero indefinitamente al crescere di t.

Per sodisfare dunque a questa condizione conviene che $\int x^2 d\lambda \mp Va$ sia sempre quantità positiva, e ciò si verifica ogni qual volta si prenda il segno inferiore cioè allorquando il punto G cade sotto H. Ma se prendesi il segno superiore, con che supponesi il punto G più alto del punto H, la quantità suddetta sarà positiva soltanto per i valori di $\int x^2 d\lambda > Va$; nel caso poi in cui fosse $\int x^2 d\lambda = Va$ avremo $\psi = \psi'$, quindi l'asse sarà rimasto inclinato come prima. Ed infatti in tale ipotesi la forza acceleratrice corrispondente alla velocità angolare $d\omega$ è nulla.

In generale possiamo dunque concludere che allorquando $\int x^2 d\lambda \mp Va$ è una quantità positiva, l'oscillazione dell'asse gp al di quà e al di là della verticale saranno sincrone a quelle di un pendolo semplice di lunghezza $\frac{Vk^2}{\int x^2 d\lambda \mp Va}$.

82. Allorchè un corpo immerso in un fluido non è dello stesso peso del volume liquido spostato, e i loro centri di gravità non cadono nella stessa verticale concepirà il corpo immerso un moto progressivo dovuto alla differenza dei due pesi, e un moto rotatorio intorno al proprio centro di gravità considerato come immobile. Se il corpo resta nel moto totalmente immerso, la

differenza dei pesi si mantiene costante, e il moto progressivo sarà quindi dovuto ad una forza motrice invariabile rappresentata dalla differenza tra il peso del corpo, e il peso del volume liquido spostato, cioè dalla differenza $g(W\delta - V\rho)$. Il moto del centro di gravità, fatta astrazione dalla resistenza del mezzo, sarà perciò uniformemente accelerato o ritardato secondo che la densità del corpo sarà maggiore o minore di quella del liquido.

83. Nel primo caso il corpo immerso scenderà fino al fondo del recipiente ed ivi si fermerà esercitando una pressione da calcolarsi nel modo insegnato ne' capitoli antecedenti.

Nel secondo caso poi il corpo da prima risalirà ancora di moto uniformemente accelerato, ed allorquando comincierà a sporgere fuori dell'acqua, cangiandosi ad ogni istante il volume liquido spostato, ne conseguita che la forza motrice diverrà variabile, onde il moto sarà vario. Quando poi avremo $W\delta = V\rho$ la forza motrice si annullerà, ma non per questo il corpo resterà immobile, proseguendo esso colla velocità concepita a salire di moto vario ritardato, perchè la forza motrice diventa negativa. Estinta poi ogni velocità, ed essendo $W\delta > V\rho$, il corpo tornerà a scendere di moto vario accelerato, cominciando così una serie di oscillazioni nel senso verticale sopra e sotto la posizione per cui $W\delta = V\rho$.

84. Abbiasi a cagione di esempio un cilindro omogeneo ad asse verticale, di base b, di altezza a, ed immerso in un fluido per un' altezza x. Siccome sarà

$$W = ba \qquad\qquad V = bx$$

la forza motrice verrà rappresentata da $gb(a\delta - x\rho)$; onde si avrà l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b(a\delta - x\rho)}{\delta ba} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{a\delta}{g\rho}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a\delta}{\rho} - x$$

che integrata in guisa che ad $x = l$ corrisponda $\frac{dx}{dt} = 0$, e $t = 0$ somministra

$$t = \sqrt{\frac{a\delta}{\rho g}}\,\text{Arc.cos.}\,\frac{a\delta - \rho x}{a\delta - \rho l}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\left(\frac{(a\delta - \rho l)^2 - (a\delta - \rho x)^2}{\rho\delta}\right)}$$

$$\cos.t\sqrt{\frac{\rho g}{a\delta}} = \frac{a\delta - \rho x}{a\delta - \rho l}.$$

Ogni volta che col crescere del tempo la quantità $t\sqrt{\frac{\rho g}{a\delta}}$ diverrà un multiplo pari di ϖ. si avrà $a\delta - \rho x = a\delta - \rho l$; da cui $x = l$, $\frac{dx}{dt} = 0$; e quando la stessa quantità diventa un multiplo impari di ϖ, sarà

$$a\delta - \rho x = \rho l - a\delta$$

onde $$x = \frac{2a\delta}{\rho} = l \qquad \frac{dx}{dt} = 0$$

La massima velocità che corrisponde a $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, accade allora quando la forza acceleratrice è nulla, nella posizione cioè dove $a\delta = \rho x$ e nella quale avrebbe luogo l'equilibrio. Al disopra, e al disotto di questa posizione oscilla dunque il galleggiante a guisa di pendolo. Tutte queste conclusioni hanno luogo però soltanto nell'ipotesi che il corpo non si sommerga del tutto, perchè in tal supposto la x diverrebbe eguale ad a e rimarrebbe costante per tutto il tempo della totale immersione. Sarebbe quindi (come sopra generalmente si è avvertito) la forza motrice costante rappresentata da $gab(\delta - \rho)$, positiva o negativa secondo che δ fosse maggiore o minore di ρ.

CAPITOLO V.

Delle gravità specifiche dei Corpi.

85. Nel §. 77. della Meccanica si disse che i pesi specifici G e G' di due corpi omogenei sono proporzionali ai pesi assoluti ϖ, ϖ' delle loro respettive unità di volume, e che prendendo per unità di peso specifico quello corrispondente ad un corpo omogeneo che abbia l'unità di peso assoluto nell'unità di volume, si ottiene per un corpo qualsivoglia omogeneo la formula $G = \varpi = \frac{P}{V}$ nella quale P e V esprimono ordinatamente il peso, ed il volume del corpo medesimo.

86. Essendosi generalmente convenuto di adottare per unità di volume il metro cubico, per unità di peso assoluto la ton-

nellata, cioè il peso assoluto di un metro cubico d'acqua distillata al massimo di densità, ne conseguita che il peso specifico dell'acqua stessa sarà quello che servir deve di unità di misura per ottener l'espressione dei pesi specifici degli altri corpi.

Osservando inoltre che il numero esprimente in metri cubici il volume V di un qualsivoglia corpo rappresenta ancora il peso in tonnellate, di un pari volume d'acqua distillata (il qual peso lo indicheremo con Π) si otterrà

$$(a) \qquad G = \varpi = \frac{P}{V} = \frac{P}{\Pi}$$

87. E di qui si conclude I.° Che la gravità specifica di un corpo omogeneo altro non, è dietro le convenzioni stabilite, che il rapporto tra il proprio peso, e quello di un pari volume d'acqua distillata al massimo di densità, II°. Che il numero rappresentante il peso specifico del dato corpo rappresenta altresì in tonnellate il peso assoluto di una sua unità di volume.

88. Facilmente si esplora il peso specifico di un solido, quando possa immergersi, senza sciogłierlo, nell'acqua distillata.

Si pesi infatti il dato corpo nel vuoto, e P ne sia il peso assoluto. Si immerga quindi nell'acqua distillata, e di nuovo si pesi, e si abbia P' per risultato. La perdita di peso $P - P'$ (§. 67.) sarà eguale al peso di un pari volume d'acqua distillata, onde $G = \frac{P}{P - P'}$ esprimerà la gravità specifica del solido, e $\frac{P'}{G}$ rappresenterà la perdita di peso che soffre il corpo passando dal vuoto nell'acqua,

89. Non potendosi talvolta pesare il corpo nel vuoto ma soltanto nell'aria, per determinarne il peso assoluto farebbe duopo conoscere il peso di un pari volume d'aria. Ed invero pesandolo nell'aria ed ottenendo Π per risultato, $P = \Pi + \omega$ ne sarebbe il peso assoluto, e la gravità specifica si dedurrebbe dalla formula

$$(b) \qquad G = \frac{\Pi + \omega}{\Pi + \omega - P'};$$

ma in generale ω è quantità piccolissima che ordinariamente può trascurarsi.

90. Se il solido fosse tanto leggiero da non potersi pesare sott'acqua bisognerebbe unirvi altro corpo di noto peso assoluto, e specifico, e tale che il composto potesse interamente sommergersi. Sia in questa ipotesi G la gravità specifica ignota del dato corpo di peso assoluto P, e con G', e P' si indichino il peso assoluto, e lo specifico del corpo aggiunto. Poichè $\frac{P'}{G'}$ è la perdita di peso che soffre il corpo aggiunto immerso nell'acqua, se Q rappresenta la perdita di peso di ambedue i corpi uniti assieme, $Q-\frac{P'}{G'}$ esprimerà la perdita di peso parziale del corpo da esplorarsi, onde il suo peso specifico verrà somministrato dalla formula $G=\frac{P}{Q-\frac{P'}{G'}}$, cioè dal proprio peso assoluto diviso per la differenza fra le perdite di peso del corpo composto, e del corpo aggiunto.

91. Generalmente, dati i pesi assoluti e specifici di due corpi, può aversi il peso specifico del composto che risulta dalla loro riunione. Siano a cagion d'esempio Π, Π' i pesi assoluti, e γ, γ' i pesi specifici parziali dei componenti. Si indichi con G il peso specifico del misto, il cui peso assoluto sarà evidentemente eguale a $P=\Pi+\Pi'$. Il suo volume poi pareggierà quello dei due componenti presi assieme cioè sarà espresso da

$$V=\frac{\Pi}{\gamma}+\frac{\Pi'}{\gamma'}$$

onde

$$G=\frac{\Pi+\Pi'}{\frac{\Pi}{\gamma}+\frac{\Pi'}{\gamma'}}=\frac{\gamma\gamma'(\Pi+\Pi')}{\Pi\gamma+\Pi'\gamma'} \qquad (c)$$

Con questa equazione, delle cinque quantità Π, Π', G, γ, γ', datone quattro, potrà conoscersi la quinta.

92. Se poi si conosce il peso assoluto del misto, e i pesi specifici del misto, e dei due componenti, allora l'equazione $P=\Pi+\Pi'$ unita alla (c) può servire ad assegnare i valori di Π, e Π' cioè dei pesi dei componenti. Fu in tal modo che Archimede, conoscendo il peso assoluto e lo specifico di una corona composta di rame, e d'oro, non che i pesi specifici di questi due me-

talli, potè determinare, in qual proporzione essi ne costituissero la lega.

93. Per la ricerca delle gravità specifiche dei solidi serve an-
Fig. 7. cora l'areometro di M. Charles, il quale è formato da una palla da cui sporge un sottile cilindro con un bacino in cima su cui si possono collocare differenti pesi. Al disotto della palla è sospeso un secchio pertugiato nel quale parimente poggiar si possono i corpi da esplorarsi. Tutto il sistema deve potersi immergere nell'acqua distillata, e un poco di mercurio introdotto nell'interno della palla può rendere al sistema un equilibrio stabile.

Per servirsi di questo istrumento conviene dapprima immergerlo vuoto nell'acqua ed osservare quale sia il peso P che posto nel bacino esterno lo affonda fino alla linea T marcata sul cilindro; si collochi quindi il corpo da esplorarsi sul bacino esterno, e sia P' il peso che conviene aggiungervi onde l'areometro si disponga alla stessa profondità; ed evidentemente il peso del corpo dato sarà eguale a $P-P'$. Si metta finalmente il suddetto corpo nel bacino inferiore che resta sommerso nell'acqua, e P'' indichi il peso da porsi nel bacino esterno onde ottenere la medesima immersione, e $P''-P'$ rappresenterà la perdita di peso che ha sofferto il dato corpo immerso nell'acqua, ossia eguagliera il peso di un pari volume d'acqua stillata. Si avrà perciò $G=\frac{P-P'}{P''-P'}$. Ben si vede che per fare questo esperimento conviene che il peso P superi il peso assoluto del corpo di cui ricercasi lo specifico; che se lo eguagliasse sarebbe $P'=0$ e $G=\frac{P}{P''}$. Se il corpo fosse più leggiero dell'acqua converrebbe rovesciare la vaschetta H, per impedirne l'ascesa quando se ne fa l'immersione.

94. Venendo ora alla ricerca dei pesi specifici dei fluidi, accenneremo per primo metodo quello di pesare un corpo di noto peso assoluto, prima nel proposto fluido, poscia nell'acqua distillata, tenendo conto delle respettive perdite di peso dal corpo medesimo sofferte. Dividendo quindi la perdita di peso avvenuta nel primo esperimento, per quella che ha luogo nel secondo il quoziente darà il cercato peso specifico. Imperocchè con que-

sto processo non si fa che dividere il peso del fluido proposto per quello di un pari volume di acqua stillata.

95. Generalmente però si usa per maggiore speditezza un Areometro di forma analoga a quello che abbiamo descritto superiormente ma privo del secchio pertugiato inferiore, e talvolta anco del bacino superiore.

Adoprasi infatti l'Areometro, o ponendo varii pesi nel bacino esterno, finchè si immerga sempre ne' diversi fluidi da esplorarsi al medesimo segno, oppure si mantiene costante il peso dello strumento, praticando nel cilindro una tal graduazione che indicar possa la profondità in cui si situa, immerso che sia nel dato fluido.

96. Nel primo caso indicando con P il noto peso dell'Areometro vuoto, e con Π, e Π' i pesi aggiunti per immergerne un volume costante V in due fluidi di gravità specifica γ e γ', sarà

$$\gamma = \frac{\Pi + P}{V}, \quad \gamma' = \frac{\Pi' + P}{V}$$

da cui $$\gamma : \gamma' :: \Pi + P : \Pi' + P$$

Che se la prima immersione si fa nell'acqua stillata onde si abbia $\gamma = 1$, otterremo $\gamma' = \frac{\Pi' + P}{\Pi + P}$.

Le trovate formule ci fanno conoscere che le gravità specifiche dei due fluidi sono proporzionali al peso dell'Areometro vuoto aumentato rispettivamente del peso aggiunto per ottenere in ciascuno di essi un' eguale immersione.

97. Adoprasi pure l'areometro a peso costante, ed allora i volumi di esso che si affondano ne' differenti fluidi saranno inversamente proporzionali ai pesi specifici de' fluidi medesimi. Dicasi infatti P il peso costante dell'Areometro e V, e V' le parti di questo strumento che restano sommerse ne' fluidi di gravità specifica γ e γ', avendosi dalla (a) $\gamma = \frac{P}{V}$, $\gamma' = \frac{P}{V'}$, si otterrà

$$\gamma : \gamma' :: \frac{1}{V} : \frac{1}{V'}$$

98. Sia ωh il volume della palla dell'areometro ed h la sezione trasversale del cilindretto. Se l ed l' esprimono le altezze

del cilindretto medesimo, che rimangono sotto il livello del fluido nelle citate due sperienze sarà $V=\omega h+hl$, $V'=\omega h+hl'$ onde

$$\gamma : \gamma' :: \omega+l' : \omega+l$$

Se l'areometro fosse cilindrico dovrebbesi porre $\omega=0$ onde $\gamma : \gamma' :: l' : l$, e però dividendolo in parti eguali, il numero delle parti immerse in due liquidi differenti, sarebbe inversamente proporzionale alle loro gravità specifiche. Quando però esiste la palla inferiore, conviene aggiungere al numero delle divisioni sommerse del cilindro anche il numero ω per ottenere quantità inversamente proporzionali alle suddette gravità specifiche. Ma perciò è necessario determinare questa quantità ω, e a tal'uopo sceglieremo di tuffare l'areometro in due fluidi di noto peso specifico, come a cagion d'esempio, nell'acqua stillata per cui $\gamma=1$ e nell'acqua marina per cui porremo $\gamma'=\Gamma$

Siano λ e λ' le porzioni di cilindro sommerso respettivamente in questi due liquidi, e otterremo $1:\Gamma::\omega+\lambda':\omega+\lambda$

onde
$$\omega=\frac{\Gamma\lambda'-\lambda}{1-\Gamma}$$

Calcolando questa formula in numeri si avrà il valore di ω necessario a stabilire il rapporto delle gravità specifiche dei dati liquidi, osservato che sia il numero dei gradi di cui si è affondato in ciascuno di essi l'areometro.

99. Per ulteriori schiarimenti sul modo di costruire, graduare, e adoperare questi strumenti si può ricorrere ai Trattati di Fisica che più particolarmente debbonsi, per la loro natura, occupare di questi soggetti.

Esistono delle Tavole che dietro accurati esperimenti rappresentano le gravità specifiche di molti corpi naturali riferite a quella dell'acqua presa per unità.

Per non togliere la continuità a questo trattato noi le apporremo alla fine del presente volume.

CAPITOLO VI.

Introduzione alla Teoria dell' Equilibrio dei fluidi elastici

100. Prima di procedere a rintracciare le condizioni dell'equilibrio dei gaz, e dei vapori, giova richiamare alcuni principj fisici che si riferiscono alla forza elastica dei medesimi in rapporto colla loro temperatura, e colla loro densità, onde stabilire delle formule analitiche in cui questi principj siano racchiusi.

101. Sia V il volume di un gaz qualunque alla temperatura zero, ϖ la sua forza elastica, ossia la pressione che esercita contro il vaso che lo contiene, e D la sua densità. Aumentisi la temperatura di θ gradi mantenendo invariata la pressione ϖ, e si indichi con V', e D' ciò che diventano V e D.

Se ci rammentiamo che un volume d'un gaz sottoposto ad una pressione costante aumenta di $\alpha = 0{,}00375$ del suo volume per ogni grado centigrado (§. 12.) si avrà

$$V' = V(1 + \alpha\theta)$$

Ma essendo variate le densità inversamente ai volumi si otterrà la proporzione

$$D : D' :: V' : V :: (1 + \alpha\theta) : 1$$

da cui
$$D' = \frac{D}{1 + \alpha\theta}$$

Se si facesse ora variare la pressione senza cangiare la temperatura θ, e si chiamassero ρ, e p ciò che diventano conseguentemente le densità D' e la pressione ϖ, per la legge stabilita nel (§. 20.) la cui scoperta è dovuta a Mariotte, si potrebbe istituire la seguente proporzione

$$D' : \rho :: \varpi : p$$

onde

$$p = \frac{\rho\varpi(1 + \alpha\theta)}{D};$$

e chiamando k il rapporto fra la pressione e la densità del gaz, che si considera a zero gradi, si potrà scrivere

(1)
$$p = \rho k(1 + \alpha\theta),$$

e così sarà espressa la forza elastica di un gaz di un vapore, o di una miscela qualunque di questi fluidi aeriformi in funzione della loro densità, e della loro temperatura.

101. Se la temperatura θ è indicata da un termometro centigrado a mercurio, questa formula non può tenersi per esatta, se non se nell'intervallo compreso fra $-36°$, e $+300°$, giacchè fuori di questi limiti la differenza fra le leggi della dilatazione del mercurio, e del gaz comincia a diventar sensibile.

102. Il coefficiente k è diverso per i diversi fluidi. Per l'aria perfettamente secca i Signori Gay-Lussac ed Arago hanno trovato all'Osservatorio di Parigi, ove la gravità è espressa da $G = 9^{m},80896$

$$k = (7951{,}12)G$$

e per l'aria al massimo di umidità

$$k = (7971{,}09)G$$

103. Se si indica con p la pressione misurata dall'altezza barometrica h di un gaz di densità ρ e avente la temperatura θ, e se con lettere accentate si esprimano le analoghe quantità relative allo stesso gaz ma corrispondenti ad una temperatura θ' si avrà evidentemente

$$p : p' : : \rho(1 + \alpha\theta) : \rho'(1 + \alpha\theta')$$

da cui

$$\rho = \rho' \frac{p}{p'} \frac{1 + \alpha\theta'}{1 + \alpha\theta} = \rho' \frac{h}{h'} \frac{1 + \alpha\theta'}{1 + \alpha\theta} \tag{2}$$

E mediante questa formula si esprimerà la densità di un gaz ad una data temperatura θ e sotto la pressione p, cognite la pressione, e la densità sotto un altra temperatura θ'.

104. La formula

$$\rho = \frac{Dp}{\varpi(1 + \alpha\theta)} \tag{3}$$

che si trae dalla (1), applicata alla ricerca della densità del vapore aqueo, per una pressione, e temperatura qualunque, osservando che D rappresentar deve la densità del vapore a zero gradi sotto la pressione ϖ, e sapendosi dall'esperienze di Gay-Lussac, che sotto eguali pressioni e temperature la densità dell'aria, e quella del vapore stanno come 16 : 10, può ridursi ad un'altra forma. Indicando infatti con δ la densità dell'aria a zero gradi sotto la pressione ϖ e con h ed H le altezze barometriche corrispondenti alle pressioni o tensioni p, e ϖ, si avrebbe

$$D=\frac{\delta.10}{16}$$

e quindi

(4) $$\rho=\frac{10}{16}\frac{h'}{H}\frac{\delta}{(1+\alpha\theta)}$$

105. Se sotto la stessa pressione barometrica h, e ad una temperatura θ qualunque, si chiama Δ la densità dell'aria secca, e Δ' quella dell'aria umida, si avrà $\Delta'=\rho+\rho'$, quando si indichino con ρ', e ρ, le densità respettive dell'aria, e del vapore che costituiscono l'aria umida suddetta. E se l'altezza barometrica a rappresenta la tensione del vapore, $h-a$ rappresenterà la forza elastica dell'aria che vi è unita; perchè l'esperienza dimostra, che la pressione di una miscela di due fluidi elastici contenuta in un dato spazio eguaglia la somma delle pressioni che eserciterebbero parzialmente i due gaz componenti, distribuiti nello stesso spazio, e conservati alla stessa temperatura. Quindi chiamando D e D' le densità dell'aria, e del vapore aqueo a zero gradi, e sotto la pressione H, otterremo

$$\Delta=\frac{h}{H}\frac{D'}{1+\alpha\theta} \qquad \text{e} \qquad D=\frac{10}{16}D', \qquad \text{e perciò}$$

$$\rho'=\frac{h-a}{H}\frac{D'}{1+\alpha\theta}=\frac{h-a}{h}\Delta$$

$$\rho=\frac{a}{H}\frac{D}{1+\alpha\theta}=\frac{a}{h}\frac{10}{16}\Delta$$

da cui

(5) $$\Delta'=\frac{\Delta}{h}\left(h-a+\frac{10}{16}a\right)$$

Questa formula può servire a determinare il peso di un volume dato di un aria umida in funzione del peso di un pari volume d'aria secca alla stessa temperatura e pressione, e della tensione del vapore contenuto nell'aria umida medesima.

106. Nelle (2), (3), (4) e (5) le quantità ρ, ρ', Δ, D, δ ec. invece delle densità possono anche rappresentare le gravità specifiche delle diverse sostanze cui si riferiscono; imperocchè non differendo queste da quelle che pel fattore comune g, esso scomparisce nelle formule suddette che contengono soltanto il rapporto delle diverse densità.

107. La quantità di calorico contenuto in una determinata massa di un corpo, è una quantità immensamente grande, e perciò incalcolabile. Solo si possono paragonare le quantità di calorico che debbono insinuarsi in una massa determinata (per esempio in quella corrispondente all' unità di peso) per portarla dalla temperatura di 0°, ad una temperatura di θ°. Chiamando q la differenza fra la quantità di calorico che contiene un kilogrammo di un gaz qualunque a θ° sottoposto ad una pressione p e avente la densità ρ, e la quantità di calorico contenuta dallo stesso kilogrammo di gaz a 0° e sotto la pressione $0,^m76$, avremo in generale $q=F(\theta, \rho, p)$. Ma poichè $p=k\rho(1+\alpha\theta)$ si potrà prendere $q=f(p, \rho)$, essendo f una funzione da determinarsene la forma.

108. Il calorico specifico di un kilogrammo di fluido è la quantità di calorico che deve aggiungersi al medesimo per indurgli l' aumento di temperatura di un grado. Chiamato C questa quantità di calorico, e supposto che i suoi aumenti siano equabili, si potrà istituire la proporzione seguente

$$1^\circ : d\theta :: C : \frac{dq}{d\theta} d\theta$$

da cui

$$C=\frac{dq}{d\theta}$$

e differenziando il valore di q

$$C=\frac{dq}{d\theta}=\left(\frac{dq}{dp}\right)\left(\frac{dp}{d\theta}\right)+\left(\frac{dq}{dp}\right)\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)$$

dunque chiamando c il calorico specifico a pressione costante, stante, quello cioè che occorre per aumentare di un grado la temperatura di un gaz senza variarne la pressione, si avrà

$$c=\left(\frac{dq}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)$$

e rappresentando con c_1 il calorico specifico a densità costante, cioè quello che fa duopo introdurre in un kilogrammo di gaz per aumentarne la temperatura di un grado, considerandone invariata la densità, si avrà

$$c_1 = \left(\frac{dq}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)$$

ma dalla (1) si trae

$$\left(\frac{dp}{d\theta}\right) = k\rho\alpha = \frac{\alpha p}{1+\alpha\theta}, \qquad \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) = \frac{-p\alpha}{k(1+\alpha\theta)^2} = \frac{1+\alpha\theta}{-p\alpha}.$$

onde
$$c = -\left(\frac{dq}{dp}\right)\frac{\alpha p}{1+\alpha\theta}, \qquad c_1 = \left(\frac{dq}{d\rho}\right)\frac{\alpha\rho}{1+\alpha\theta}$$

e posto
$$\gamma = \frac{c}{c'}$$
si avrà

$$(a) \qquad \rho\left(\frac{dq}{d\rho}\right) + \gamma p\left(\frac{dq}{dp}\right) = 0$$

109. Abbiasi un volume di gaz la cui temperatura sia $\theta - \varepsilon$ e p' la pressione, e ρ'' la densità, coll'aggiunta di calorico se ne aumenti la temperatura riducendola a θ e lasciandone invariata la pressione. Si comprima il volume per ridurlo alla grandezza primitiva, e con ciò la temperatura si riduca a $\theta + \omega$, la pressione a p, e la densità ritornerà ρ''. Si sottragga del calorico, ossia si lasci freddare il gaz, finchè la sua temperatura si riduca a θ, la pressione a p'', e la densità rimanga ρ''. Poscia si lasci ancora freddare finchè riducasi la temperatura a $\theta - \varepsilon$; e in tal caso avremo come prima la pressione p', e la densità ρ''. Scrivendo dunque in linee orizzontali i diversi valori delle temperature, densità, e pressioni che hanno luogo nelle cinque diverse epoche della ipotetica descritta esperienza si avrà

Epoca	*Pressione*	*Densità*	*Temperatura*
I.	p'	ρ''	$\theta - \varepsilon$
II.	p'	ρ'	θ
III.	p	ρ''	$\theta + \omega$
IV.	p''	ρ''	θ
V.	p'	ρ''	$\theta - \varepsilon$

E siccome per passare dalla densità relativa alla epoca I. a quella della II. in cui la pressione è costante, così, ritenuto come dianzi che c esprima il calorico specifico a pressione costante, si sarà dovuto aumentare la quantità di calorico $c\varepsilon$. Nella II. e III. epoca la quantità di calorico supponesi rimaner costante, e solo si aumenta la temperatura perchè si restringe il volume. Ora per passare dalla III. alla V. epoca si perde la temperatura $\omega+\varepsilon$; e siccome la densità è rimasta costante, così detto c_1 il calorico specifico a densità costante si sarà perduta la quantità di calorico $c_1(\omega+\varepsilon)$. Ma poichè nella I. e V. epoca la quantità di calorico deve essere identica, così tanto deve essere il calorico aggiunto passando dalla I. alla II. quanto quello perduto passando dalla III. alla V., onde si avrà

$$c\varepsilon = c_1(\varepsilon+\omega)$$

e

$$\gamma = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{\omega}{\varepsilon}$$

110. Per determinare ω, ed ε in funzione di p, p', p'' osserverò che nella I. III. e IV. epoca essendovi densità costante, ed avendosi

$$p' = k\rho''(1+\alpha(\theta-\varepsilon))$$
$$p'' = k\rho''(1+\alpha\theta)$$
$$p = k\rho''(1+\alpha(\theta+\omega))$$

si ottiene

$$\frac{p'}{p''} = 1 - \frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha\theta}, \quad \frac{p}{p''} = 1 + \frac{\alpha\omega}{1+\alpha\theta}$$

de cui si trae

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{p-p''}{p''-p'}$$

e quindi

$$\gamma = \frac{p-p'}{p''-p'}$$

111. Ma non potendosi eseguire facilmente la descritta esperienza si fa invece la seguente.

Si prenda un recipiente chiuso ripieno di aria alla temperatura θ, alla densità ρ', e alla pressione p' minore dell'atmosferica. Si metta istantaneamente in comunicazione coll'aria esteriore che supponesi di temperatura θ e di pressione p; e in tal caso aumenterà la temperatura interna fino a $\theta+\omega$ e la densità diverrà ρ'' e la pressione eguaglierà l'esteriore p. Chiudasi il vaso e si lasci freddare finchè torni la temperatura θ rimanendo la densità ρ'' e riducendosi la pressione a p''. E potremo nelle tre epoche della esperienza notare lo stato del gaz come abbiamo fatto superiomente.

Epoca	*pressione*	*densità*	*temperatura*
(a)	p'	ρ'	θ
(b)	p	ρ''	$\theta+\omega$
(c)	p''	ρ''	θ

112. Se ben si osserva queste tre epoche corrispondono alle II, III e IV del primo esperimento ipotetico; e siccome le pressioni p', p, p'' possono misurarsi dall'altezza del mercurio in un manometro che comunichi coll'aria chiusa nel recipiente, così queste serviranno a determinare il valore di γ, che assumendo i dati seguenti dell'esperienza

$$p=0^{m},7665\,,\qquad p'=0^{m},7527\,,\qquad p''=0{,}7629$$

somministrano $\gamma=1{,}353$ valore diverso di quello trovato da altri che lo deducono dal valore della condensazione $\delta=\frac{\rho''-\rho'}{\rho'}=\frac{p''-p'}{p'}$ espresso per ε; che ricavandolo dalle due

$$p'=k\rho'(1+\alpha\theta),\qquad p'=k\rho''(1+\alpha(\theta-\varepsilon))\qquad \text{è}\ \ \delta=\frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha(\theta-\varepsilon)}\,,$$

e non già $\delta=\frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha\theta}$.

113. Ritornando all'equazione (a) cioè alla

$$(a)\qquad \rho\left(\frac{dq}{d\rho}\right)+\gamma p\left(\frac{dq}{dp}\right)=0$$

osserveremo che se la quantità $\gamma=\frac{c}{c_{1}}$ che rappresenta il rapporto che esiste in uno stesso gaz fra il calorico specifico a pressione costante, e il calorico specifico a densità costante, è indipendente dalla temperatura e dalla pressione del gaz medesimo, dovrà considerarsi in essa equazione come costante, non dipendendo questa quantità in generale che dalla natura dei differenti fluidi cui corrisponde.

114. Ammessa una tale ipotesi si potrà integrare la (a) che è una equazione differenziale parziale di primo ordine coi noti metodi. Si elimini infatti da essa il $\left(\frac{dq}{dp}\right)$ mediante la

$$\left(\frac{dq}{d\rho}\right)d\rho+\left(\frac{dq}{dp}\right)dp=dq$$

e si otterrà

$$dq=\left(\frac{dq}{d\rho}\right)\left(d\rho-\frac{\rho dp}{\gamma p}\right)$$

Rendendosi differenziale esatto questo secondo fattore col moltiplicarlo per $\frac{-p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho^2}$, converrà che $\left(\frac{dq}{d\rho}\right)\frac{\rho^2}{p^{\frac{1}{\gamma}}}$ sia una funzione di $\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}$; onde si avrà $dq=f'\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)d\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)$; e perciò

$$(b) \qquad q=f\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)$$

essendo f una funzione arbitraria. E se f_1 indica una funzione inversa di f si otterrà

$$\rho f_1(q)=p^{\frac{1}{\gamma}}$$

e per la (1)

$$\theta=\frac{1}{\alpha k}\rho^{\gamma-1}f_1(q)^{\gamma}-\frac{1}{\alpha}$$

115. Restando invariata la quantità q di calorico contenuta in un dato gaz, supponiamo che le quantità p, ρ, θ diventino p', ρ', θ' e si avrà

$$p'^{\frac{1}{\gamma}}=\rho' f_1(q) \qquad \theta'=\frac{1}{\alpha k}\rho'^{\gamma-1}f_1(q)^{\gamma}-\frac{1}{\alpha}$$

espressioni in cui θ e θ' indicano dei gradi centigradi, ed $\frac{1}{\alpha}$ eguaglia 266,67.

Eliminando $f_1(q)^\gamma$ fra queste e le precedenti equazioni ottiensi

$$p' = p\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^\gamma$$

e

$$\theta' = \left(\frac{1}{\alpha} + \theta\right)\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\gamma - 1} - \frac{1}{\alpha}\,.$$

Equazioni che racchiudono le leggi della forza elastica, e della temperatura dei gaz compressi, o dilatati, senza che subisca alcuna variazione la quantità di calorico in essi contenuta. Queste sono fondate sulla sola supposizione che il rapporto γ non varii per uno stesso fluido al cangiarsi della pressione, e della temperatura; e una tale ipotesi è stata verificata rispetto all'aria atmosferica.

116. Per determinare la forma della funzione arbitraria f contenuta nella (b) che può anche scriversi

$$(b') \qquad q = f\left(\alpha k p^{\frac{1}{\gamma} - 1}\left(\frac{1}{\alpha} + \theta\right)\right)$$

la supposizione più probabile è quella di ammettere, che in un gaz, sottoposto ad una costante pressione, corrispondano eguali aumenti di volume ad eguali aumenti di calorico. Il che val quanto ritenere il calorico specifico c costante, quando l'aumento di un grado di temperatura a cui corrisponde è misurato da un termometro ad aria (§. 11, 12). In tal caso dovrà essere q una funzione lineare di θ; e perciò potrà porsi

$$(c) \qquad q = A + B\left(\frac{1}{\alpha} + \theta\right)p^{\frac{1}{\gamma} - 1} = A + \frac{B}{k\alpha\rho}\,p^{\frac{1}{\gamma}}$$

indicando con A e B due quantità da determinarsi, indipendenti da p e θ, e relative alla natura del gaz che si considera.

Avendosi

$$(d) \qquad c_1 = \left(\frac{dq}{dp}\right)\frac{p}{\frac{1}{\alpha} + \theta} = \alpha k \rho \left(\frac{dq}{dp}\right)$$

ed essendo nella nostra ipotesi

$$\left(\frac{dq}{dp}\right) = \frac{B}{\gamma k \alpha \rho} p^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

otterremo

$$c_1 = \frac{B}{\gamma} p^{\frac{1}{\gamma}-1}, \qquad \text{e} \qquad c = B p^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

non chè

$$\frac{dq}{d\theta} = B\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) p^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

117. Volendo applicare queste formule all'aria atmosferica, osserveremo che l'esperienze di Laroche e Bérard danno $c = 0{,}267$ per l'aria secca sotto la pressione ϖ, rappresentata dall'altezza barometrica $0^m{,}76$. Avremo dunque per determinare B l'equazione

$$B \varpi^{\frac{1}{\gamma}-1} = 0{,}267$$

e chiamata h l'altezza barometrica corrispondente alla pressione qualunque p, ed osservando che $\frac{p}{\varpi} = \frac{h}{0{,}76}$ si avrà

$$c = 0{,}267 \left(\frac{0{,}76}{h}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}};$$

e il valore di c_1 ottiensi da questo dividendolo per γ; e poichè questa costante supera l'unità, l'esponente $1 - \frac{1}{\gamma}$ sarà un numero positivo, e perciò il calorico specifico di una massa d'aria diminuirà all'aumentarsi della sua forza elastica h.

118. Si può eziandio applicare l'equazione (c) al vapore dell'acqua; ma mancano fino ad ora esperienze bastantemente precise per determinarne a dovere le costanti. Però si fanno le seguenti supposizioni che sembrano non molto allontanarsi dal vero.

I. Che la quantità γ sia costante per le diverse temperature e densità della stessa massa di vapore, finchè realmente si mantiene a stato di fluido aeriforme.

II. Che per eguali aumenti di temperatura misurati da un termometro ad aria, cresca egualmente la quantità di calorico contenuto in un chilogrammo di vapore, tanto considerandone la pressione costante, quanto supponendone la densità invariabile.

119. In tale supposizione chiamando C il calorico necessario a convertire in vapore a 100° centigradi e alla pressione barometrica $0^{m},76$, un chilogrammo d'acqua la cui temperatura era zero; e indicando quindi per q la quantità di calorico necessaria a vaporizzare questo stesso chilogrammo d'acqua e ridurlo alla temperatura θ sotto la pressione p corrispondente all'altezza barometrica h; e finalmente prendendo ad esprimere con c il calorico specifico del vapor d'acqua sotto la pressione costante di $0^{m},76$ riferito al calorico specifico dell'acqua alla temperatura zero che prendesi per l'unità, si avrà

$$C=A+B\left(\frac{1}{\alpha}+100^{\circ}\right)\left(0,76\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

e

$$c=B(0,^{m}76)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

da cui

$$B=\frac{c}{(0,76)^{\frac{1}{\gamma}-1}}\,; \qquad \text{ed} \qquad A=C-c\left(\frac{1}{\alpha}+100^{\circ}\right)$$

e perciò

$$q=C+c\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\theta\right)\left(\frac{0,^{m}76}{h}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-\left(\frac{1}{\alpha}+100^{\circ}\right)\right]$$

120. Il Poisson nel suo trattato di Meccanica pone

$$C=550^{\circ}, \qquad c=0,847.$$

Ma probabilmente in quanto al valore di C vi è qualche equivoco. Secondo il Navier che prende il calorico specifico del vapore sotto la pressione barometrica costante $0^{m},76$ eguale ad uno, eguale a quello cioè dell'acqua allo stato liquido; e che suppone di più, che occorrano 650 gradi di calorico per far passare l'acqua da 0° allo stato di vapore a 100° sotto la pressione $0,^{m}76$, si avrebbe

$$C = 650^{\circ}, \qquad \text{e} \qquad c = 1.$$

Il Belli assume C prossimamente eguale a 640°.

Rispetto poi alla quantità γ è desiderabile che delle esatte esperienze ci diano il mezzo di assegnarne con bastante precisione il valore. Supponendola intanto col Navier eguale all'unità, ritenendo cioè, che tanto nel vapore come nell'acqua sia il calorico specifico a pression costante al pari del calorico specifico a densità costante eguale ad uno, si otterrebbe $q = 550^{\circ} + \theta$; ed evidentemente una tale ipotesi coincide con quella, che risguarderebbe le quantità di calorico necessarie a far passar l'acqua dallo stato liquido allo stato gazoso, siccome costantemente eguali a 550°, a qualunque temperatura e pressione il vapore sia formato, ciò che è conforme alle esperienze di Southern.

121. Il peso di un metro cubico di vapor d'acqua alla temperatura 0° e a $0^{m},76$ di pressione, essendo eguale a $0,^{kil}8100$, per una temperatura θ e per una pressione h qualunque si avrà il suo peso specifico π espresso dall'equazione seguente tratta dalla (3)

$$\pi = \frac{0,^{kil}8100}{0,^{m}76} \frac{h}{\frac{1}{\alpha} + \theta} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{266,^{kil}67 \times 0,8100}{266,67 + \theta} \frac{h}{0,^{m}76} = \frac{216^{kil}}{266,67 + \theta} \frac{h}{076}$$

onde il peso di un volume V di vapore alla stessa temperatura θ e pressione h sarà espresso da $V\pi$. E chiamando Q la quantità di calorico necessario per formare questo peso di vapore, adoprando acqua che trovavasi alla temperatura zero, Q eguaglierà q preso tante volte quanti sono i chilogrammi contenuti nel peso πV, onde si avrà

$$Q = \frac{Vh}{0,^{m}76} \frac{216^{kil.}}{266,67 + \theta} q.$$

E l'unità a cui sarà riferita la quantità Q è quella stessa cui è riferita la q, cioè la quantità di calorico atta ad innalzare da zero ad un grado la temperatura di un chilogrammo d'acqua; la quale unità è settantacinque volte più grande della quantità di calorico necessario a sciogliere un chilogrammo di ghiaccio a zero gradi senza accrescerne la temperatura, e l'unità di volume è il metro cubico.

122. Il Poisson assume per unità di volume il litro e per unità di peso il grammo, e giunge ad una formula analoga, ma in cui l'unità di calorico è la quantità di questo fluido necessaria ad innalzare di un grado la temperatura di un grammo di acqua a zero gradi. Ma l'unità di calorico da noi prescelta è quella stessa adottata da Navier da Ponceiet, e da Clement: chiamata dal primo grado di calore, dai due ultimi *calorie*, e a cui noi potremo dare il nome di termoposo.

123. In quanto alle miscele di due o più gaz o vapori ci limiteremo ad osservare, che due volumi v, e v' di differenti gaz alla stessa temperatura θ, e sotto la stessa pressione p, uniti assieme in uno spazio $v+v'$, si compenetrano e formano una miscela omogenea alla stessa temperatura θ, e di forza elastica rappresentata da p.

124. Di quì si trae la ragione di un risultato di esperienza registrato al §. (105.), che dimostra essere $p+p'$ la forza elastica della miscela di due gaz, che occupando separatamente lo stesso spazio v svilupperebbero le forze elastiche p e p'. Supponendo infatti i gaz in quest'ultimo stato, si cangi in $\frac{vp'}{p}$ il volume del gaz sottoposto alla pressione p'. onde la sua forza elastica divenga p; si uniscano quindi i due gaz così ridotti ad egual pressione p in un vaso chiuso di capacità $v+\frac{p'v}{p}=\frac{v}{p}(p+p')$, e la miscela conserverà la stessa temperatura θ, e la medesima forza elastica p. Si riduca finalmente il volume di una tal miscela al primitivo v, e per la legge di Mariotte, dettane p_1 la pressione corrispondente, si avrà $p_1v=v(p+p')$, e perciò $p_1=p+p'$. Degli analoghi risultamenti avrebbero luogo eziandio per le miscele di più gaz e vapori.

125. Conservandosi eguale la quantità di calorico contenuta in due gaz separati, o nella loro miscela, e sussistendo quest'eguaglianza all'aumentarsi ancora di un grado la comune loro temperatura θ, ne deriva, che se m ed m' rappresentano in chilogrammi i

pesi parziali dei due gaz, e c, c', c'' i calorici specifici a pressione costante degli stessi due gaz e della loro miscela dovrà essere

$$(m+m')c''=mc+m'c'$$

In modo perfettamente analogo, indicando con c_1, c_1', c_1'' i calorici specifici a volume costante dei due gaz separati, e della loro miscela, si sarebbe ottenuto

$$(m+m')c_1''=mc_1+m'c_1'$$

e ponendo

$$\frac{c}{c}=\gamma \qquad \frac{c'}{c_1'}=\gamma' \qquad \frac{c''}{c_1''}=\gamma''$$

si avrà

$$\gamma''=\frac{m\gamma c_1+m'\gamma'c_1'}{mc_1+m'c_1'}$$

CAPITOLO VII.

Dell' Equilibrio de' fluidi elastici

126. In un fluido elastico la densità essendo legata alla pressione dall'equazione $\rho=mp$ dedotta dalla (1) del capitolo antecedente, in cui si è fatto $\frac{1}{k(1+\alpha\theta)}=m$, la (4) del capitolo II si convertirà nella

$$(a) \qquad \frac{dp}{p}=md\psi$$

essendo $\qquad d\psi=Xdx+Ydy+Zdz$

127. Cominciando dal supporre θ, cioè la temperatura costante, avremo m parimente costante: quindi integrando si otterrà.

$$(b) \qquad Log.p=m\psi+Log.\varpi$$

da cui $\qquad p=\varpi e^{m\psi} \qquad \rho=m\varpi e^{m\psi}$

rappresentando con ϖ una costante arbitraria da determinarsi, conoscendo la pressione del fluido in un dato punto.

128. Che se la temperatura varia da un punto ad un altro,

la quantità m varierà pure; sicchè, onde dalla (a) si possa realmente ottenere un valore possibile di p, converrà che sia m una funzione di ψ, il che non potrà accadere quando la temperatura θ non sia essa pure funzione di ψ.

Ma se $\theta = F(\psi)$ ne viene di conseguenza che per tutti i punti ove ψ non varia, e pei quali si ha $d\psi = 0$, la θ rimane costante. Dunque concluderemo che per tutti gli strati di livello di un fluido elastico in equilibrio la temperatura deve essere costante.

Questa condizione adempita, sarà

$$Log.p = \int m d\psi + Log.\varpi$$

da cui

$$p = \varpi e^{\int m d\psi}, \qquad \rho = m \varpi e^{\int m d\psi}$$

129. Quando la massa fluida sia attratta da un centro fisso, ripetendo il ragionamento istituito al §. (39.) sarà facile il convincersi, che qualunque sia la legge di attrazione le superficie di livello saranno tutte sferiche e concentriche, rappresentate come allora dalle equazioni $dr = 0$, ed $r = C$

130. Allorchè si considerasse l'atmosfera che ci circonda come animata dalla sola forza d'attrazione della terra risguardata siccome sferica, le superficie di livello dovrebbero essere altrettante superficie sferiche concentriche alla terra stessa, e per quanto si è detto, la temperatura dovrebbe essere costante per tutta l'estensione di ciascuna di esse. Ma poichè in queste superficie la temperatura va realmente crescendo dai poli all' equatore, così indur se ne deve che l' equilibrio non può sussistere; infatti noi sappiamo che dalla mancanza di questa condizione traggono origine i venti permanenti, che hanno veramente luogo vicino all' Equatore.

131. Richiamando ora le ipotesi del §. (41.), e supponendo c il raggio terrestre, dove la forza attrattiva si rappresenta con $-g$ e la pressione con ϖ, per una molecula d'aria situata ad una distanza r dal centro della terra si avrà

$$d\psi = F(r)dr = \frac{-gc^2}{r^2} dr,$$

onde, quando si faccia astrazione dalla diversa temperatura ed umidità dei varii strati atmosferici, si otterrà dalla (b)

$$\frac{dp}{p}=\frac{-mc^2}{r^2}\,gdr\,;$$

che integrata, risguardando m costante e in guisa che ad $r=c$ corrisponda $p=\varpi$, somministra

$$(c)\qquad \frac{mgc}{r}(c-r)=\text{Log}.p-\text{Log}.\varpi$$

e
$$p=\varpi e^{mg\frac{c}{r}(c-r)}\,,\qquad \rho=m\varpi e^{mg\frac{c}{r}(c-r)}$$

132. Se il punto che si considera non è molto elevato sarà prossimamente $\frac{c}{r}=1$, onde, chiamando z l' elevazione $r-c$, si avrà

$$\text{Log}.\varpi-\text{Log}.p=mgz$$
$$p=\varpi e^{-mgz}\,,\quad \rho=m\varpi e^{-mgz}\,.$$

Le quali ultime formule ci condurrebbero, stante le ipotesi ammesse, alle seguenti conseguenze.

I.° L' elevazione di un punto dell' atmosfera sopra un altro è proporzionale alla differenza de' logaritmi delle pressioni che vi corrispondono; la quale differenza eguaglia anche quella de' logaritmi delle altezze barometriche che misurano le pressioni medesime. Infatti, detta z' l' elevazione di un punto a cui corrisponda la pressione p', avremo $\text{Log}.\varpi-\text{Log}.p'=mgz'$, che combinata colle precedenti somministra

$$\text{Log}.p-\text{Log}.p'=m(z'-z).$$

II.° Crescendo le elevazioni sopra un dato luogo in progressione aritmetica, le densità dell' aria, le pressioni, e le altezze barometriche che le misurano, scemano in progressione geometrica.

III.° Ritenendo sempre dietro le fatte supposizioni che la densità dell'aria sia per tutto proporzionale alla pressione, e che si faccia astrazione dalla forza centrifuga che agisce in senso opposto alla gravità, l' altezza dell' atmosfera sarebbe infinita; imperocchè ponendo $p=0$, si ottiene $z=\infty$.

CAPITOLO VIII.

Della livellazione barometrica.

133: L' equazione (c) in cui si ponga z per $\gamma - c$, per k il valore medio tratto dai due registrati al §. (102), e per m, $\frac{1}{k(1+\alpha\theta)}$, diventa

$$\text{Log.}\frac{\varpi}{p} = \frac{-gcz}{G(7961,10)(c+z)(1+\alpha\theta)}$$

e si applica utilmente alla misura delle distanze verticali, osservate che siano le temperature, e le altezze barometriche, che misurano le pressioni ϖ e p, alla stazione infima e suprema.

Si pongano a tal uopo le seguenti denominazioni

	Stazione suprema	*Stazione infima*
Altezza	z	$z=0$
Pressione	p	ϖ
Altezza Barometrica	h'	h
Densità del mercurio	n'	n
Temperatura del medesimo	T'	T
Temperatura dell' aria	t'	t
Gravità	g'	g

Egli è evidente che fra queste quantità sussisteranno le seguenti relazioni

$$\varpi = ngh \qquad p = n'g'h$$

$$g' = \frac{gc^2}{(c+z)^2} \qquad n' = \frac{n}{1+\frac{(T-T')}{5550}}$$

onde

$$Log.\frac{\varpi}{p} = Log.\frac{h}{h'\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)} + 2Log.\frac{c+z}{c} =$$

$$\frac{gcz}{G(7961^m,10)(c+z)(1+\alpha\theta)}$$

nella quale si potrà prendere per θ la media fra la temperatura dell'aria alle due stazioni, cioè $\theta = \frac{t+t'}{2}$.

134. Siccome è sempre unito all'aria atmosferica del vapor d'acqua, e in tanta maggior copia quanto più è elevata la temperatura, ed essendo la densità di codesto vapore più piccola, a cose pari, di quella dell'aria pura, ne segue, che la diminuzione di densità dell'aria umida in cui cresce il vapore al crescere della temperatura, deve corrispondere ad un valore maggiore di $\alpha = 0{,}00375$ per ogni grado. Quindi per comodo di calcolo e con sufficiente approssimazione si pone $\alpha = 0{,}004$, e però $\alpha\theta = \frac{2}{1000}(t+t')$

Si noti che per ridurre a Logaritmi Tabularj i Logaritmi Neperiani contenuti nel 1.° membro della sopra descritta equazione conviene moltiplicarli pel modulo $M = 0{,}4342945$. Di più se ψ è la latitudine del luogo in cui si fa l'osservazione inferiore, cui corrisponde la gravità g, si ha da una formula nota della meccanica superiore.

$$g = \frac{(1 - 0{,}002588.\cos.2\psi)G}{(1 - 0{,}002588.\cos.2(48^\circ.50'.14'')} .$$

Sostituendo questi valori nella trovata equazione, il cui secondo membro siasi moltiplicato per M, e poscia sciogliendola rispetto a z si trova, dopo qualche riduzione

$$\text{(A)} \qquad z = \frac{18337{,}46\left(1+2\frac{(t+t')}{1000}\right)}{1 - 0{,}002588.\cos.2\psi} \times$$

$$\left(\text{Log.}\frac{h}{h^{\text{l}}\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)} + 2\,\text{Log.}\left(1+\frac{z}{c}\right)\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)$$

135. Trascurando la frazione $\frac{z}{c}$ si troverà un valore approssimativo di z; poi mettendo questo valore nella suddetta Equazione, e ricavando un nuovo valore di z si ottiene un risultato pressochè esatto.

Se in luogo del coefficiente 18337,46 si pone nella trovata formula un coefficiente indeterminato A, e se ne assegni il valore prendendo il medio di quelli che gli convengono, onde essa somministri per z dei valori corrispondenti a molte elevazioni, cognite dietro misure trigonometriche, si otterrà $\alpha = 18336$, numero pochissimo differente da quello che erasi dedotto col calcolo diretto.

136. A tutto rigore quando si voglia assegnare l'elevazione di un punto terrestre al di sopra del livello del mare, nell' espressione di g', che rappresenta la gravità alla stazione superiore, si deve avere riguardo all'azione dello strato di terra che ha per altezza z; e perciò supponendone la densità eguale alla media terrestre, e seguendo la scorta dei calcoli ampiamente sviluppati dal Poisson al N.° 255, si dovrà porre

$$g' = \frac{gc^2}{(c+z)^2} + \frac{2gz}{4c}$$

e atteso la piccolezza della frazione $\frac{z}{c}$ si potrà ridurre il fattore $\left(1+\frac{z}{c}\right)$ contenuto nella equazione (A) al seguente, $\left(1+\frac{5}{8}\frac{z}{c}\right)$. Si prenderà poi per ψ la media delle latitudini corrispondenti alle due stazioni.

137. Quando l' altezza z non è molto considerabile, si può trascurare la frazione $\frac{z}{c}$, e per compenso ingrandire il coefficiente numerico; e se le latitudini ove si fanno le osservazioni non sono molto differenti da 45°, si potranno calcolare le altezze z con sufficiente esattezza per mezzo della formula seguente,

$$(A') \qquad z = 18393^m \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \text{Log.} \frac{h}{h'}.$$

CAPITOLO IX.

Del principio delle velocità virtuali applicato all' equilibrio dei fluidi incompressibili.

138. Prima di stabilire le leggi dell'Idrodinamica, per seguire un metodo conforme a quello che si è adoperato nella Meccanica, sarà conveniente il dimostrare che si verifica sempre il principio delle velocità virtuali per un fluido incompressibile, non pesante, ed equilibrato in un vaso fisso, e sul quale si esercitano Fig. 3

delle pressioni superficiali per mezzo di forze P, P', P'', P''', agenti normalmente contro degli stantuffi di base a, a', a'', a''' che premono il dato liquido, che occupa ancora alquanto spazio dei cilindri entro cui giocano questi stantuffi.

Infatti dovendo essere la pressione p, riferita all' unità superficiale, eguale per tutte le faccie degli stantuffi prementi, si avrà

$$p = \frac{P}{a} = \frac{P'}{a'} = \frac{P''}{a''} = \frac{P'''}{a'''} \tag{1}$$

E se muovendo, a cagion d'esempio, gli stantuffi P, e P' le faccie a, ed a' prendono le posizioni a_1, a_1' percorrendo rispettivamente gli spazj $aa_1 = h$, $a'a_1' = h'$ a seconda delle direzioni delle forze P e P'; e se contemporaneamente le faccie a'', a''' sono passate in a_1'', a_1''', avendo percorso gli spazietti h'', h''' in opposta direzione alle forze P', e P'', per la continuità ed incompressibilità della massa liquida dovrà sussistere l'equazione

$$ah + a'h' - a''h'' - a'''h''' = 0 \tag{2}$$

E sostituendovi i valori di a, a', a'', a''' tratti dalla (1), si otterrà

$$Ph + P'h' - P''h'' - P'''h''' = 0 \tag{3}$$

E questa è l'equazione delle velocità virtuali applicata alle forze P, P', P'', P''', i cui punti di applicazione soggiacciono agli spostamenti h, h', $-h''$, $-h'''$ compatibili colle condizioni del sistema.

139. Per un fluido incompressibile ed omogeneo, animato da forze quali si vogliano, e in equilibrio, ha luogo parimente un' equazione analoga a quella del principio delle velocità virtuali; ma non si può dimostrarne la sussistenza, quando non si conoscano quali sono i moti minimi compatibili colle condizioni di questi sistemi che devono rimanere incompressibili e continui.

Fig. 9 Supponiamo a tale oggetto che m rappresenti una molecula di un liquido in equilibrio corrispondente alle coordinate x, y, z, ed immaginiamo impresso a tutta la massa liquida un tal moto minimo, che sia compatibile colla di lui natura, e figuriamoci che la molecula m passi in m', mentre la molecula m' passa in m'', questa in m''', e così di seguito.

Risguardando il punto materiale m come il centro di gravità di un minimo velo fluido $d\omega$ normale ad $mm'=ds$, che effettuato lo spostamento infinitesimo passa in $n'n'$ diventando $d(\omega+d\omega)$; e considerando il velo fluido $d(\omega+d\omega)$ come una minima area che passa nella posizione $n''n''$ ec., potrà immaginarsi il moto del fluido raccolto entro lo spazio $N'N'nn$, come effettuato entro un recipiente a pareti stabili la cui capacità interna corrisponda alla figura del filamento fluido $NNN'N'$, formato da tanti strati fluidi, che vanno, nell' ideato spostamento minimo, ad occupare successivamente gli uni i posti abbandonati dagli altri.

Ma per la continuità del liquido che si considera conviene, che i volumi $nnn'n'$, $n'n'n''n''$ ec., siano eguali tra loro; dovrà perciò essere costante il prodotto $\rho d\omega ds$, e quindi si avrà, denotando con A una costante,

$$\rho d\omega ds = A$$

la quale equazione dovendosi verificare per ciascun filamento in cui si possa suddividere il liquido colla regola prescritta, racchiuderà in se la condizione della incompressibilità e della continuità del liquido medesimo.

Nel §. (27) si trovò per condizione di equilibrio di un liquido l' equazione

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \rho Sds$$

nella quale il dp si riferisce alla differenza di pressione fra due punti vicinissimi quali si vogliano di una massa fluida.

Si potrà essa moltiplicare per la quantità costante $d\omega ds$; e si otterrà $dp\,.\,d\omega ds = \rho Sds\,.\,d\omega ds$ ed integrando

$$d\omega ds\,.\,p = \int S\rho d\omega ds.ds + \text{Cost.}$$

e determinando la costante in guisa che questo integrale si estenda fra le superficie libere NN, $N'N'$, ove si contradistinguano le quantità con lettere accentate sarebbe

$$p''d\omega''ds'' - p'd\omega'ds' = \int_{''}^{'} S\rho dsd\omega\,.\,ds.$$

Evidentemente $p''d\omega''ds''$, e $-p'd\omega'ds'$ rappresentano i momenti virtuali delle due pressioni superficiali, ed $\int S\rho dsd\omega\,.\,ds$ esprime la somma dei momenti virtuali delle forze motrici che animano gli elementi di massa $\rho ds d\omega$, e a cui sono impressi gli spostamenti ds.

140. Si potrebbe integrare la soprascritta formula anche rispetto a $d\omega$; ed indicando con Σ il simbolo integrale corrispondente (che generalmente parlando rappresenterà un integral duplo) si avrà

$$\Sigma p'' d\omega'' ds'' - \Sigma p' d\omega' ds' = \Sigma \int S \rho ds d\omega ds$$

ossìa la somma di tutti i momenti virtuali delle pressioni superficiali deve eguagliare la somma di tutti i momenti virtuali delle forze motrici sollecitanti i filamenti fluidi che costituiscono la data massa.

* * *

IDRODINAMICA

CAPITOLO I.

Equazioni fondamentali del moto de' fluidi.

141. Si riferisca una massa fluida continua in moto, a tre assi ortogonali fissi nello spazio, e si suppongano gli elementi di essa animati da forze acceleratrici quali si vogliano. Alla fine del tempo t si prenda a considerare una molecula m del fluido, corrispondente alle coordinate x, y, z, e siano p, e ρ la pressione e la densità che hanno luogo per quell'istante in quel dato punto. Trascorso il tempo $t+dt$, si trovi la molecula medesima nel punto vicinissimo m', avendo percorso lo spazietto ds, diagonale del parallelepipedo differenziale avente dx, dy, dz per lati. Detta V la velocità di questa molecula alla fine del tempo t, ed u, v, w le sue componenti parallele agli assi, si avrà evidentemente Fig. 10

$$(a) \qquad V=\frac{ds}{dt}, \qquad u=\frac{dx}{dt}, \qquad v=\frac{dy}{dt}, \qquad w=\frac{dz}{dt}$$

$$(b) \qquad V^2=u^2+v^2+w^2, \qquad u=V\frac{dx}{ds}, \qquad v=V\frac{dy}{ds}, \qquad w=V\frac{dz}{ds}$$

142. La pressione, la densità, la velocità del fluido cambiano nello stesso istante da luogo a luogo, e cambiano nello stesso luogo al variar del tempo, sicchè si devono considerare come funzioni delle coordinate, e del tempo. Variando le loro espressioni soltanto rispetto al tempo si avranno gli aumenti o i decrementi loro nello stesso punto dello spazio in due intervalli successivi di tempo; e variando le espressioni medesime rispetto alle coordinate soltanto, si avranno le differenze di queste quantità corrispondenti, nel medesimo istante, a due punti vicinissimi della massa fluida.

Se dunque la molecula m è trascorsa in m' nel tempo dt, per ottenere la densità, la pressione e la velocità corrispondenti a questa stessa molecula dopo che ha percorso il suddetto spazio ds, converrà aggiungere ai valori di p, ρ, V, u, v, w, i loro differenziali completi presi rispetto al tempo e rispetto alle coordinate, i quali differenziali si indicheranno col simbolo δ; e però si avrà

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dt}\right)dt + \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz = \left(\frac{dp}{dt}\right)dt + dp$$

se si conviene di rappresentare con dp la variazione di p rispetto alle sole coordinate. Analogamente poi si potrà scrivere

$$(c)\quad\left\{\begin{array}{l} \delta\rho = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)dt + d\rho \qquad \delta V = \left(\frac{dV}{dt}\right)dt + dV \\ \delta u = \left(\frac{du}{dt}\right)dt + du, \quad \delta v = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt + dv, \quad \delta w = \left(\frac{dw}{dt}\right)dt + dw \end{array}\right.$$

dalle ultime delle quali combinate colle (a) si dedurrà

$$(d)\quad\left\{\begin{array}{l} \frac{\delta u}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du}{dy}\right)v + \left(\frac{du}{dz}\right)w \\ \frac{\delta v}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right)u + \left(\frac{dv}{dy}\right)v + \left(\frac{dv}{dz}\right)w \\ \frac{\delta w}{dt} = \left(\frac{dw}{dt}\right) + \left(\frac{dw}{dx}\right)u + \left(\frac{dw}{dy}\right)v + \left(\frac{dw}{dz}\right)w \end{array}\right.$$

143. Immaginiamo ora che a tutti i punti della massa fluida siano respettivamente impresse delle velocità $-\delta u$, $-\delta v$, $-\delta w$, contrarie ed eguali agli aumenti di velocità δu, δv, δw che hanno per ciascuna di esse veramente luogo in virtù delle forze acceleratrici impresse. e dipendentemente dalla natura del sistema che deve restar continuo. Per il teorema di d'Alembert (*M.* 312.) il sistema dovrà essere in equilibrio quando a tutte le forze motrici corrispondenti alle componenti rettangolari X, Y, Z delle forze acceleratrici impresse si aggiungano le forze motrici corrispondenti alle

$$-\frac{\delta u}{dt}, \quad -\frac{\delta v}{dt}, \quad -\frac{\delta w}{dt}.$$

Richiamando dunque i principj stabiliti nell'Idrostatica (§. 23.), si avranno le tre equazioni seguenti relative ad una porzione qualsivoglia della massa fluida in moto, di forma, grandezza e situazione arbitraria

$$(e)\quad \begin{cases} \int\int\int\left(X'-\frac{\delta u'}{dt}\right)\rho'd'x'd'y'd'z'=\int\int pd'zd'y \\ \int\int\int\left(Y'-\frac{\delta v'}{dt}\right)\rho'd'x'd'y'd'z'=\int\int pd'xd'z \\ \int\int\int\left(Z'-\frac{\delta w'}{dt}\right)\rho'd'x'd'y'd'z'=\int\int pd'yd'x \end{cases}$$

nelle quali il prodotto $d'x'd'y'd'z'$ indica il volume di un elemento qualunque del fluido, che in generale può essere differente dal parallelepipedo differenziale $dxdydz$, i cui lati dx, dy, dz sono gli spazietti percorsi nel tempo dt dalla molecula m parallelamente agli assi.

Quantunque nelle (e) come nelle (1) del §. 23. dovessero essere negativi i secondi membri, quando veramente rappresentassero le somme delle pressioni superficiali prese fra i limiti convenuti nel §. 22, pure per invertirne i limiti riducendoli identici a quelli del primo membro, in cui siasi effettuata una prima integrazione, fa d' uopo tenerli positivi. E in conseguenza di un tal cangiamento di segno gli integrali

$$\int\int pd'zd'y,\quad \int\int pd'xd'z,\quad \int\int pd'yd'x$$

rappresenteranno le somme delle pressioni superficiali decomposte a seconda dei prolungamenti degli assi dalla parte delle coordinate negative.

144. Ammesse queste convenzioni, ed osservando che le suddette equazioni devono sussistere indipendentemente dai limiti degli integrali, con ragionamenti analoghi a quelli di cui ci siamo valsi nel §. 24. potremo dedurre, differenziando, le seguenti

$$(f)\quad \begin{cases} X-\frac{\delta u}{dt}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\right) \\ Y-\frac{\delta v}{dt}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dy}\right) \\ Z-\frac{\delta w}{dt}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dz}\right) \end{cases}$$

Sommando queste equazioni, dopo averle moltiplicate respettivamente per gli aumenti indeterminati arbitrarj $d'x$, $d'y$, $d'z$ si otterrebbe

$$(A) \qquad \frac{1}{\rho}d'p = Xd'x + Yd'y + Zd'z - \delta u\frac{d'x}{dt} - \delta v\frac{d'y}{dt} - \delta w\frac{d'z}{dt}$$

in cui si indica con

$$d'p = \left(\frac{dp}{dx}\right)d'x + \left(\frac{dp}{dy}\right)d'y + \left(\frac{dp}{dz}\right)d'z$$

il differenziale della pressione indipendente dal tempo, e relativo al passaggio dal punto m che ha per coordinate x, y, z, ad un'altro punto qualunque m'' vicinissimo ad esso e corrispondente alle coordinate $x+d'x$, $y+d'y$, $z+d'z$, il quale ultimo punto non sarà, generalmente parlando, situato sulla traiettoria realmente descritta dal primo.

Questa equazione deve rappresentare la contemporanea esistenza delle (f), e perciò in esse deve potersi decomporre; e a tale condizione è soddisfatto quando sia possibile il ritrovare per p una funzione di x, y, z, il cui differenziale completo relativo a queste variabili sia il secondo membro della (A) suddetta moltiplicata per ρ; e quindi delle equazioni di condizione che lo riducano integrabile rispetto ad x, y, z potranno per ciò solo esser sostituite alle (f).

145. Evidentemente chiamando $d'\sigma$ la distanza mm'', e indicando con F la risultante delle forze X, Y, Z diretta secondo la retta f, e con T' la sua componente parallela a $d'\sigma$ avremo (*M.* 231.)

$$Fd'f = T'd'\sigma = Xd'x + Yd'y + Zd'z$$

e siccome (*M. Nota III.*)

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta u}{dt} &= \frac{\delta V}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{V}{dt}\delta\frac{dx}{ds} = \frac{\delta v}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{V^2}{r}\cos.\widehat{rx} \\ \frac{\delta v}{dt} &= \frac{\delta V}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{V}{dt}\delta\frac{dy}{ds} = \frac{\delta V}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{V^2}{r}\cos.\widehat{rx} \\ \frac{\delta w}{dt} &= \frac{dV}{dt}\frac{dz}{ds} + \frac{V}{dt}\delta\frac{dz}{ds} = \frac{\delta V}{dt}\frac{dz}{ds} + \frac{V^2}{r}\cos.\widehat{rz} \end{aligned} \right.$$

dove r rappresenta il raggio d'osculo della trajettoria corrispondente alla molecula m; così sarà facile ridurre la (A) alla seguente forma

$$(A') \qquad \frac{1}{\rho}d'p = T'd'\sigma - \frac{\delta V}{dt}d's - \frac{V^2}{r}d'r$$

quando si avverta che chiamando $d's$ la projezione di $d'\sigma$ sulla trajettoria si ha

$$\frac{dx}{ds}d'x+\frac{dy}{ds}d'y+\frac{dz}{ds}d'z=d'\sigma\cos.\widehat{s\sigma}=d's\,,$$

e indicando con $d'r$ la projezione di $d'\sigma$ sul raggio d'osculo della trajettoria medesima

$$d'x\cos.\widehat{rx}+d'y\cos.\widehat{ry}+d'z\cos.\widehat{rz}=d'\sigma\cos.\widehat{\sigma r}=d'r$$

146. Alla (A) si può dare ancora un'altra forma, per mezzo della quale appariranno più facilmente alcune singolari proprietà della medesima.

Sostituendovi infatti per $\frac{\delta u}{dt}$, $\frac{\delta v}{dt}$, $\frac{\delta w}{dt}$ i valori tratti dalle (d), e aggiungendovi e togliendovi i termini seguenti

$$\pm\left(\frac{du}{dy}\right)ud'y,\quad \pm\left(\frac{du}{dz}\right)ud'z$$
$$\pm\left(\frac{dv}{dx}\right)vd'x,\quad \pm\left(\frac{dv}{dz}\right)vd'z$$
$$\pm\left(\frac{dw}{dx}\right)wd'x,\quad \pm\left(\frac{dw}{dy}\right)wd'y$$

con facile riduzione essa trasformasi nella

$$(A'')\left\{\begin{aligned}
\frac{d'p}{\rho}&=Xd'x+Yd'y+Zd'z-d'\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)\\
&-\left(\frac{du}{dt}\right)d'x-\left(\frac{dv}{dt}\right)d'y-\left(\frac{dw}{dt}\right)d'z\\
&-\left[\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]\left[vd'x-ud'z\right]\\
&-\left[\left(\frac{du}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)\right]\left[wd'x-ud'y\right]\\
&-\left[\left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dy}\right)\right]\left[wd'y-vd'z\right]
\end{aligned}\right.$$

147. *Se* invece di moltiplicare le (f) per i differenziali indipendenti $d'x$, $d'y$, $d'z$, si fossero moltiplicate per gli spazietti dx, dy, dz

percorsi dalla molecula m nel tempo dt, e poscia si fossero sommate, si sarebbe ottenuta un' equazione analoga alla (A), la quale, essendo $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$, si potrebbe scrivere

$$(B) \qquad \frac{dp}{\rho}=Xdx+Ydy+Zdz-u\delta u-v\delta v-w\delta w;$$

e in questa le differenze indipendenti dal tempo si riferiscono al punto m ed al punto m' situato nella linea dal primo percorsa. Osservando che

$$Xdx+Ydy+Zdz=Tds=Fdf$$

e
$$u\delta u+v\delta v+w\delta w=V\delta V=V\left(\frac{dV}{dt}\right)dt+VdV$$

si potrà anche trasformare nelle seguenti

$$(B')\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{\rho}&=Fdf-V\left(\frac{dV}{dt}\right)dt-VdV \\ \frac{dp}{\rho}&=Tds-\left(\frac{dV}{dt}\right)ds-VdV \end{aligned}\right.$$

che si sarebbero immediatamente dedotte dalla (A') ponendovi $d'r=0$ e $d'\sigma=ds$.

Parimente si può scrivere la (B) come appresso

$$(B'') \qquad \frac{dp}{\rho}=Xdx+Ydy+Zdz-d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$$
$$-\left(\left(\frac{du}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz\right)$$

la quale ben si vede altro non essere che la (A'') in cui si ponga

$$d'x=dx=udt,\ d'y=dy=vdt,\ d'z=dz=wdt$$

148. Una qualunque delle (A), che da se sola basta a rappresentare la contemporanea esistenza delle (f), si chiama equazione delle forze sollecitanti. Si chiamerà parimente con tal nome una qualunque delle (B); ma perchè si possa decomporre nelle (f) conviene supporvi sempre inclusa la condizione che i differenziali in essa contenuti non siano totalmente indipendenti tra loro, ma bensì relativi a due punti della trajettoria descritta dalla data molecula.

149. Quando il fluido che si considera è incompressibile ed omogeneo la densità ρ sarà una costante data, e perciò resterebbero da determinarsi i valori di p, u, v, w relativi ad una molecula e ad un istante qualunque, per potere con una successiva integrazione assegnare la posizione della molecula stessa in un epoca qualsivoglia mediante l'espressioni finite delle coordinate della medesima in funzione del tempo. Ma le (f) essendo in numero di tre non bastano ad una tal determinazione.

Se il fluido è compressibile ed elastico aumenta il numero dell'incognite, restando da determinarsi la ρ; ma crescono ancora le equazioni avendosi (§. 101.)

$$(C) \qquad p = k\rho(1+\alpha\theta) = m\rho;$$

sicchè tanto nell'uno quanto nell'altro caso è necessario, per risolvere compiutamente il problema, rintracciare un' altra equazione fra le proposte quantità; e facilmente essa si dedurrà esprimendo analiticamente la natura dei moti possibili al sistema che prendiamo ad esame, i quali moti non devono in alcun modo interrompere la di lui continuità.

150. Si immagini perciò lo spazio, occupato dal fluido in moto, diviso in tanti spazietti parallelepipedi rettangoli permeabili pienamente al fluido medesimo, e determinati da tante linee rette fisse che possiamo idear condotte parallelamente ai tre dati assi ortogonali.

Abbia uno di questi parallelepipedi fissi un angolo triedro coincidente colla più volte nominata molecula m, che alla fine del tempo t corrisponde alle coordinate x, y, z, e siano $d'x$, $d'y$, $d'z$, i tre lati sopra i quali un tal parallelepipedo immaginasi realmente costruito. Se nel punto m alla fine del tempo t vi corrisponde la densità ρ, e alla fine del tempo $t+dt$, nel medesimo punto dello spazio la densità è divenuta

$$\rho + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)dt,$$

ne concluderemo che la massa del fluido contenuto nello spazio parallelepipedo $d'xd'yd'z$ ha subito nel tempo dt la variazione

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) d'xd'yd'z\,dt.$$

Ma questa variazione può calcolarsi anche in altro modo. Infatti nel moto avvenuto alla massa fluida continua nel tempo dt, tutte le molecule che traversano il parallelepipedo $d'xd'yd'z$, avranno una velocità e una direzione infinitamente poco differente tra loro, per cui generalmente parlando il fluido sarà entrato per tre faccie del parallelepipedo medesimo, mentre contemporaneamente ne sarà uscita un'altra porzione per le faccie opposte. E poichè nel caso che si contempla la direzione e la velocità di queste molecule pochissimo differiscono dalla direzione e dalla velocità della molecula situata in m alla fine del tempo t, così il fluido sarà entrato per le tre faccie $d'xd'y$, $d'xd'z$, $d'zd'y$ che passano pel punto m, e sarà uscito per quelle che ad esse sono respettivamente opposte.

Entrando dunque il fluido per la faccia $d'xd'y$ con velocità w parallela alle z si potrà considerare espressa da wdt la lunghezza degli spazietti percorsi nel tempo dt da ciascuna molecula situata nella faccia medesima nel senso delle z; onde la massa di fluido entrata, valutata come un parallelepipedo obliquiangolo avente $d'xd'y$ per base, wdt per altezza, sarà espressa da $d'x\,d'y\rho wdt$. La massa poi uscita per l'opposta faccia nello stesso tempuscolo dt sarà indicata dalla quantità $d'xd'y\left(\rho w+\left(\frac{d.\rho w}{dz}\right)d'zdt\right)$, onde la differenza fra il fluido entrato e quello uscito sarà

$$-\left(\frac{d.\rho w}{dz}\right)d'xd'yd'zdt.$$

Rispetto alle altre faccie si concluderà analogamente, che

$$-\left(\frac{d\,\rho v}{dy}\right)d'x\,d'y\,d'z\,dt,\quad -\left(\frac{d.\rho u}{dx}\right)d'x\,d'y\,d'z\,dt,$$

rappresentano la differenza fra il fluido entrato per due di esse, e quello uscito dalle altre che sono loro respettivamente opposte.

Dunque la variazione totale della massa fluida avvenuta nello spazio fisso $d'xd'yd'z$ nel tempo dt, sarà eguale ancora alla somma di queste tre parziali differenze; cioè a

$$-\left[\left(\frac{d.\rho u}{dx}\right)+\left(\frac{d\,\rho v}{dy}\right)+\left(\frac{d.\rho w}{dz}\right)\right]d'x\,d'y\,d'z\,dt.$$

Paragonando questa espressione con quella della variazione medesima valutata nel primo modo si otterrà la seguente equazione

$$(D)\qquad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d\,\rho u}{dx}\right)+\left(\frac{d\,\rho v}{dy}\right)+\left(\frac{d\,\rho w}{dz}\right)=0$$

che chiamasi della continuità; ed è la quinta equazione che unitamente alle (f) ed alla (C) serve nei fluidi compressibili ed elastici a determinare le cinque incognite del problema.

Quando il fluido è incompressibile ed omogeneo sarà ρ una quantità costante rispetto al tempo e rispetto alle coordinate, onde la (D) si ridurrà alla

$$(\Delta)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0;$$

e questa combinata colle (f) servirà a determinare le quattro incognite p, u, v, w in funzione delle coordinate e del tempo.

151. Ma l'equazione che esprime analiticamente la natura del sistema può anche ottenersi sott'altra forma, che in alcuni casi speciali prestasi più facilmente all'integrazione. Fig. 9

Si richiamino a tal uopo le considerazioni, e le denominazioni del §. 138; e si osservi che se $NN'N'N'$ indica un filamento fluido tale, che le molecule situate nell'asse $Mmm'm''M'$ vanno nel tempo dt successivo a t ad occupare l'una il posto dell'altra, mentre le sezioni trasversali prendono la posizione, e la figura delle successive, per la continuità della massa fluida contenuta in questo filamento, conviene che nello spazio compreso tra le due sezioni trasversali qualsivoglia $d\omega$, e $d\left(\omega+\left(\frac{d\omega}{ds}\right)d's\right)$, la densità abbia variato nel tempuscolo dt in correlazione della massa entrata per la sezione ω considerata come fissa, e di quella uscita per la sezione $d\left(\omega+\left(\frac{d\omega}{ds}\right)d's\right)$ parimente risguardata immobile nello spazio.

Ma la massa aumentata non è che il volume compreso tra le due descritte sezioni moltiplicato per l'aumento della densità avvenuto nel tempo dt, ossia $d\omega d's\left(\frac{d\rho}{dt}\right)dt$; e questa deve eguagliare la differenza fra la massa di due prismi di fluido aventi respettivamente le basi $d\omega$, e $d\left(\omega+\left(\frac{d\omega}{ds}\right)d's\right)$, le altezze Vdt, e $\left(V+\left(\frac{dV}{dt}\right)d's\right)dt$, e le densità ρ, e $\rho+\left(\frac{d\rho}{ds}\right)d's$; la quale differenza sarà perciò

$$-\left(\frac{d.V\rho d\omega}{ds}\right)d'sdt.$$

Dovrà dunque aversi la seguente

$$(D') \qquad d\omega\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d\,\rho V d\omega}{ds}\right)=0$$

che sta a rappresentare la (D).

Quando il fluido è incompressibile ed omogeneo si ha ρ costante e però la trovata equazione si riduce a

$$(\Delta') \qquad \left(\frac{d.Vd\omega}{ds}\right)=0$$

dalla quale deducesi $Vd\omega=\zeta(t)$; laonde la quantità $Vd\omega$ per un dato filamento sarà soltanto funzione del tempo e potrà ritenersi costante in uno stesso istante per tutta l'estensione del filamento medesimo.

152. Continuando nell'ipotesi che il fluido che si considera sia incompressibile, e ρ una quantità costante, il primo membro della (A), diverrà un differenziale completo rispetto alle coordinate. E lo sarà pure se il fluido è compressibile ed elastico, poichè si ha generalmente ρ espresso per p; e perciò si potrà scrivere $\frac{d'p}{\rho}=d'P$, essendo P una funzione di p, e quindi

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right), \quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dP}{dy}\right), \quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dz}\right)=\left(\frac{dP}{dz}\right).$$

In ambedue le ipotesi adunque, il secondo membro dell'equazione medesima dovrà essere parimente un differenziale completo rispetto alle coordinate. Ma poichè il termine $Fd'f=Xd'x+Yd'y+Zd'z$ lo è da se solo quando le componenti X, Y, Z derivano da attrazioni o ripulsioni verso centri fissi in funzione delle distanze (*M.* 174); così converrà che sia un differenziale completo il trinomio

$$\frac{\delta u}{dt}\, d'x + \frac{\delta v}{dt}\, d'y + \frac{\delta w}{dt}\, d'z,$$

ossia i termini dell'(A'') che vi corrispondono, e che non sono altro che una trasformazione del trinomio suddetto. Ma fra questi termini il primo, cioè $d'\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$, è già un differenziale esatto; e perciò lo dovranno essere anche gli altri, vale a dire

$$(E)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dt}\right) d'x + \left(\frac{dv}{dt}\right) d'y + \left(\frac{dw}{dt}\right) d'z \\ &+\left[\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\right)\right] \left(vd'x - ud'y\right) \\ &+\left[\left(\frac{du}{dz}\right) - \left(\frac{dw}{dx}\right)\right] \left(wd'x - ud'z\right) \\ &+\left[\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dw}{dy}\right)\right] \left(wd'y - vd'z\right). \end{aligned}\right.$$

E i criterii di integrabilità di questo polinomio terranno luogo delle (f).

153. Esiste un caso estesissimo in cui questa quantità è realmente un differenziale completo rispetto alle coordinate, ed è quando il trinomio

$$(F) \qquad ud'x + vd'y + wd'z$$

è da se solo un differenziale completo, talchè possa considerarsi eguale, a

$$d'k = \left(\frac{dk}{dx}\right) d'x + \left(\frac{dk}{dy}\right) d'y + \left(\frac{dk}{dz}\right) d'z,$$

essendo

$$(h) \qquad u = \left(\frac{dk}{dx}\right), \quad v = \left(\frac{dk}{dy}\right), \quad w = \left(\frac{dk}{dz}\right)$$

e k una funzione di x, y, z e t.

Infatti ammessa una tale supposizione i criterj di integrabilità della formula (F) devono essere soddisfatti, e però si avrà

$$\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dx}\right)=0\,,\quad \left(\frac{du}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)=0\,,\quad \left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dy}\right)=0$$

con che si annullano tutti i termini della (E) racchiusi fra parentesi quadre e rimane soltanto

$$\left(\frac{du}{dt}\right)d'x+\left(\frac{dv}{dt}\right)d'y+\left(\frac{dw}{dt}\right)d'z=$$

$$\left(\frac{d(ud'x+vd'y+wd'z)}{dt}\right)=\left(\frac{d\,d'k}{dt}\right)=d'\left(\frac{dk}{dt}\right)$$

si ridurrà dunque la (A') alla seguente

$$(G)\qquad d'P=Fd'f-\frac{d'V^2}{2}-d'\left(\frac{dk}{dt}\right)$$

che integrata rispetto ad x, y, z, ritenendo il tempo t costante, somministra

$$(H)\qquad P=\psi(t)+\int Fd'f-\frac{V^2}{2}-\left(\frac{dk}{dt}\right)=$$

$$\psi(t)+\int(Xd'x+Yd'y+Zd'z)-\frac{u^2+v^2+w^2}{2}-\left(\frac{dk}{dt}\right)$$

in cui la $\psi(t)$ rappresenta una funzione arbitraria del tempo, che tien luogo della costante.

154. Da quanto si è detto facile è il convincersi che l'equazione (A) è integrabile quando il trinomio (F) è un differenziale completo; ma la proposizione inversa non è sempre vera, poichè tante volte può non essere un differenziale esatto quando d'altronde siano soddisfatti i criterii di integrabilità del secondo membro della medesima. Anzi vedremo in seguito un esempio in cui si riscontra l'esposta particolarità.

Allorchè si verifica l'integrabilità del trinomio (F), e però può ottenersi la (H), la (D) cioè l'equazione della continuità prende una forma più semplice; poichè avvertendo alle (h) essa diviene

$$(I)\quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d.\,\rho\left(\frac{dk}{dx}\right)}{dx}\right)+\left(\frac{d.\,\rho\left(\frac{dk}{dy}\right)}{dy}\right)+\left(\frac{d.\,\rho\left(\frac{dk}{dz}\right)}{dz}\right)=0$$

e trattandosi di fluidi incompressibili ne' quali deve risguardarsi ρ costante, si semplifica tanto più riducendosi alla seguente

$$(I') \qquad \left(\frac{d^2k}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2k}{dz^2}\right)=0$$

155. Questa è una equazione di second'ordine a differenze parziali e dalla quale, conoscendo il metodo di integrarla, si potrebbe ottenere un' espressione finita di k in x, y, z e t, che indicheremo con

$$k=\varphi(x, y, z, t).$$

Prendendo quindi le derivate parziali di una tal funzione rispetto ad x, y, z, ed avvertendo alle (h), che corrispondono alle (f), si otterrebbero i valori seguenti

$$u=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad v=\left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \quad w=\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$

da cui si ricava l' intensità e la direzione della velocità di una qualsivoglia molecula in un istante qualunque.

E finalmente traendo il valore di $\left(\frac{dk}{dt}\right)=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, si dedurrebbe dalla (A) l' espressione di P in x, y, z e t, contenente delle funzioni arbitrarie da determinarsi; e con questa sarebbe nota la pressione corrispondente alla molecula suddetta.

Ma per ora l' analisi non è tanto avanzata da somministrar mezzi onde giungere ad integrare generalmente le equazioni (I) ed (I'); e soltanto in alcuni casi speciali è possibile ottenerne delle espressioni finite di k, mediante le quali procedere si possa alla soluzione completa di alcuni particolari problemi di Idrodinamica.

156. I ragionamenti istituiti sulle (A) possono ripetersi sulle (B) e si vedrà che esse pure sono integrabili parzialmente ogni qualvolta il trinomio (F) sia un differenziale completo. Anzi osservando le (B') ci assicureremo che, la vera condizione della loro integrabilità riducesi a dover essere $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ una funzione di s, ed in tale ipotesi si potrà ottenere per P il seguente valore

$$(H') \qquad P=C+\int T ds-\frac{V^2}{2}-\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$$

$$=C+\int F df-\frac{V^2}{2}-\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$$

E in questa equazione converrà avvertire che allorquando per alcune specialità del problema fosse noto per ciascuna molecula la natura della linea s, considerando un sol filamento fluido quale è stato superiormente descritto, sarebbe C una funzione arbitraria del tempo, e gli integrali si dovrebbero estendere rispetto agli archi di questa linea data s. Ma se una tal linea non è cognita e si voglia che la (H') appartenga a una molecula qualsivoglia di un filamento qualunque, evidentemente la C sarà una funzione della t non solo, ma ancora delle altre quantità che sono rimaste costanti nell'integrazione parziale che si è fatta della (B); per cui questa quantità C sarà una funzione del tempo, variabile da filamento a filamento, e da molecula a molecula.

157. Ritornando alle equazioni (A) ed avendo osservato che se ne rende possibile l'integrazione quando il trinomio

$$(F) \qquad ud'x + vd'y + wd'z$$

è un differenziale esatto, gioverà rintracciare quando, e come realmente possa esser tale. Ma prima di tutto sarà conveniente il dimostrare che se in qualche istante del moto esso lo è, così si conserva anche per tutto il tempo successivo.

Sia infatti il trinomio $(F) = d'k$, differenziale completo rispetto ad x, y, z alla fine del tempo t. Dopo il tempo $t + dt$ esso sarà diventato

$$ud'x + vd'y + wd'z + \left(\frac{du}{dt}\right)d'x + \left(\frac{dv}{dt}\right)d'y + \left(\frac{dw}{dt}\right)d'z$$

$$= d'\left(k + \left(\frac{dk}{dt}\right)dt\right)$$

E da questa forma chiaramente apparisce che dopo il tempo $t + dt$ esso conservasi differenziale completo rispetto alle variabili medesime. Ripetendo lo stesso ragionamento per tutti gli istanti successivi si verrebbe a provare che prosegue ad esserlo per tutto il tempo del moto.

Fa d'uopo però considerare che l'esposta dimostrazione ha luogo soltanto nell'ipotesi che il valore di k sia tale da potersi sviluppare secondo le potenze crescenti, intere e positive del dt quando in esso si ponga invece di t, $t + dt$; come pure quando per i valori di u, v, w espressi per t non è in difetto il teorema del Taylor applicato allo sviluppo delle funzioni medesime in serie ordinate per gli incrementi interi, e positivi di t.

Salvo dunque il caso in cui non si avverasse questa circostanza, non solo si può ammettere la esattezza della esposta dimostrazione ma di più si può anche provare la proposizione inversa cioè: che allorquando in qualche istante del moto il suddetto trinomio non è differenziale esatto non potrà mai divenirlo. Ed invero se per un dato valore di t tale apparisce, lo dovrebbe essere sempre stato anteriormente e ognor lo sarebbe in seguito.

158. Da tutto ciò rendesi palese che in generale, quando al principio del moto, il trinomio (F) è un differenziale esatto lo sarà ancora per tutta la durata del moto medesimo. Il che avverrà in moltissimi casi dei quali qui sotto esporremo alcuni dei più frequenti.

Primieramente quando il mobile parte dalla quiete senza verun impulso iniziale; perchè in tal caso si ha $u=v=w=0$ quando $t=0$. Sarà dunque per questo istante il trinomio $udx+vdy+wdz$, integrabile; e tale in conseguenza si manterrà nel movimento successivo.

Secondariamente quando le velocità iniziali sono prodotte da un impulso qualunque esercitato sopra la superficie di un fluido che preventivamente trovavasi in quiete. Ed infatti rappresentando con u, v, w le velocità iniziali parallele agli assi, prodotte da questa spinta superficiale ad una molecula qualunque della massa fluida corrispondente alle coordinate x, y, z; ed immaginando a questa non che alle altre molecule tutte della massa stessa impresse delle velocità $-u$, $-v$, $-w$ eguali e contrarie a quelle che ciascuna di esse realmente aveva concepito nel primo istante del moto; vi dovrà essere equilibrio tra l'impulso esercitato alla superficie, e le forze corrispondenti alle soprascritte velocità $-u$, $-v$, $-w$. Dunque per quanto si disse al §. 26., dovrà essere $-udx-vdy\ -wdz$ un differenziale esatto rispetto alle coordinate, e però tale si manterrà anche in appresso.

159. Occorre non di rado di determinare la figura della superficie libera dei fluidi in moto, supponendola non premuta, o sottoposta ad una pressione costante per tutta la sua estensione,

ma però variabile al variar del tempo. È facile il vedere che una tale superficie sarà generalmente rappresentata dalla equazione $d'p = 0$; la quale, sostituendovi per $d'p$ i valori tratti dalla (A) o dalla (A'), si trasforma o nell' una o nell' altra delle due seguenti:

$$(K) \qquad \left(X - \frac{\delta u}{dt}\right) d'x - \left(Y - \frac{\delta v}{dt}\right) d'y - \left(Z - \frac{\delta w}{dt}\right) d'z = 0$$

$$(K') \qquad T d'\sigma - \frac{\delta w}{dt} d's - \frac{v^2}{r} d'r = 0$$

E nel caso che il trinomio (f) sia un differenziale esatto, avvertendo alla (G) potrà anche ridursi alla

$$(K'') \qquad F d'f - d' \frac{v^2}{2} - d'\left(\frac{dk}{dt}\right) = 0$$

Queste equazioni integrate che fossero rappresenterebbero, dipendentemente dalle infinite forme e dai diversi valori che si potrebbero attribuire alle funzioni arbitrarie del tempo in esse introdotto, un' infinità di superficie tracciate anche nell' interno del fluido, variabili da istante ad istante di figura e posizione, ma per tutta l' estensione delle quali sarebbe la contemporanea pressione uniforme. Perchè dunque appartenessero solamente alla superficie libera bisognerebbe determinare a dovere queste funzioni arbitrarie.

160. È cosa essenzialissima, ma oltremodo scabrosa, l' assegnare rigorosamente la forma di sì fatte funzioni che non solo appariscono nell' integrazione dell' equazioni appartenenti alle superficie libere, ma ben anche nell' integrazione delle equazioni fondamentali dell' idrodinamica, quelle cioè delle forze sollecitanti e della continuità. Nè da altro può dipartirsi per raggiungere questo scopo fuorchè dalla conoscenza dello stato iniziale del fluido e dall' ammettere certe condizioni relative alle sue superficie.

Nel movimento di un fluido spesso è concesso supporre che i punti di esso che si trovano a un' epoca determinata sopra una parete fissa o mobile, o alla superficie libera del fluido medesimo, rimangano sopra questa parete o in questa superficie per tutto il tempo del moto. Quando una tale condizione è ammissibile ecco in qual modo essa può esprimersi analiticamente.

161. Rappresenti $f(t, x, y, z) = 0$ l'equazione di una superficie fissa, o variabile di figura e posizione, la quale alla fine del tempo t passa per la molecula m del fluido, corrispondente alle coordinate x, y, z. Perchè la stessa molecula si trovi dopo un tempo qualunque nella medesima superficie, è d'uopo che le coordinate che determinano la posizione della molecula stessa per un qualsiasi altro valore di t soddisfacciano alla medesima equazione $f = 0$. Dovrà dunque sussistere quest'equazione per tutti i valori del tempo contenuto in essa esplicitamente, o implicitamente, in quanto che le coordinate x, y, z della molecula m, che deve rimaner sulla superficie stessa, sono pur esse funzioni del tempo. Avrà quindi luogo la sua derivata presa rispetto al tempo, cioè la seguente

$$\left(\frac{df}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0$$

che equivale alla

$$(L) \qquad \left(\frac{df}{dt}\right) + \left(\frac{df}{dx}\right)u + \left(\frac{df}{dy}\right)v + \left(\frac{df}{dz}\right)w = 0$$

A questa stessa equazione di condizione giungere si poteva con considerazioni diverse. Infatti il differenziale completo dell'equazione $f = 0$ sarebbe

$$\left(\frac{df}{dt}\right)dt + \left(\frac{df}{dx}\right)d'x + \left(\frac{df}{dy}\right)d'y + \left(\frac{df}{dz}\right)d'z\,;$$

ed $$x + d'x\,,\ y + d'y\,,\ z + d'z$$

rappresenterebbero le coordinate di un punto m'' qualunque prossimo ad m, situato alla fine del tempo $t + dt$ sulla superficie che passava per m alla fine del tempo t, e la quale nel tempuscolo dt ha cangiato figura e posizione. Ma perchè la molecula m'' sia precisamente quella stessa che trovavasi precedentemente in m, conviene che $d'x$, $d'y$, $d'z$ siano realmente gli spazietti udt, vdt, wdt dalla molecula medesima percorsi; onde, per introdurre nella trovata equazione la richiesta condizione, converrà sostituirvi i suddetti valori, e però si otterrà la precedente

162. Se la superficie su cui la molecula del fluido è obbligata a rimanere è una parete fissa, la $f = 0$ non conterrà più il tempo

esplicitamente, e in conseguenza avendosi $\left(\frac{df}{dt}\right)=0$, l'equazione di condizione si ridurrà alla seguente

$$(L') \qquad u\left(\frac{df}{dx}\right)+v\left(\frac{df}{dy}\right)+w\left(\frac{df}{dz}\right)=0$$

Sostituendo per u, v, w i loro valori $V\cos.\widehat{Vx}$, $V\cos.\widehat{Vy}$, $V\cos.\widehat{Vz}$, ed osservando che

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\lambda\cos.\widehat{Nx} \quad \left(\frac{df}{dy}\right)=\lambda\cos.\widehat{Ny} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)=\lambda\cos.\widehat{Nz},$$

quando si faccia $\lambda=\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}$, e si chiami N la normale alla superficie rappresentata dalla $f=0$ nel punto dalle coordinate x, y, z, si otterrà

$$\cos.\widehat{Vx}\cos.\widehat{Nx}+\cos.\widehat{Vy}\cos.\widehat{Ny}+\cos.\widehat{Vz}\cos.\widehat{Nz}=0$$

da cui $\qquad \cos.\widehat{NV}=0$, ed $\widehat{NV}=90°$

Da questo risultamento rilevasi che la velocità di ciascheduna molecula adiacente alla parete fissa deve essere tangente alla di lei superficie; ed infatti una tal condizione è necessaria, e bastante perchè la molecula m non si stacchi giammai dalla parete fissa, ed altro non faccia che strisciare lungo la medesima.

163. La superficie libera, generalmente parlando, è tutta egualmente premuta, e la di lei uniforme pressione non cangia al variar del tempo. Talvolta però conservando per tutta la sua estensione eguaglianza di pressione, questa cangia di valore col tempo; ed in tal caso l'espressione di p relativa alla superficie libera sarebbe indipendente dalle coordinate della medesima, ma soltanto si dovrebbe risguardare come una funzione $F(t)$ del tempo; quindi la di lei equazione sarebbe data dalla

$$(M) \qquad p-F(t)=0$$

Se si vuole introdurre nel problema la condizione che le molecule che si trovano in un dato istante alla superficie libera debbano rimanervi per tutto il seguito del moto, converrà operare sull'equazione (M) come si è fatto sulla $f=0$, e dedurne la (L), che nel caso nostro diventa

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)+u\left(\frac{dp}{dx}\right)+v\left(\frac{dp}{dy}\right)+w\left(\frac{dp}{dz}\right)=\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

e questa dovrà coesistere colla (*M*), la quale poi d' altronde coinciderà colle integrali delle equazioni del §. 159 che appartengono alla superficie libera medesima.

164. Allorchè il fluido in movimento è contenuto da recipienti di determinata figura, è di non poco vantaggio il saper indagare, quando esista, la posizione e l'intensità della risultante delle pressioni che dal fluido medesimo sono esercitate parzialmente contro le pareti del recipiente. Questa ricerca è totalmente analoga a quella che ci siamo proposti nella Idrostatica relativamente alle pressioni esercitate contro le superficie piane o curve da fluidi in quiete; e però le stesse formule possono servirci anche nel caso attuale, purchè in esse si metta per p il valore della pressione relativo ai fluidi in movimento. Accaderà qui pure talvolta che le pressioni contro una superficie curva non ammettano una risultante unica; ma si potrà sempre determinare un sistema di due forze, che produrrebbero lo stesso effetto di tutte le pressioni.

165. Se poi si volessero conoscere gli sforzi esercitati dal fluido contro tutta l'interna superficie del recipiente in cui si muove, le equazioni (*e*) le quali non convengono soltanto a una porzione indeterminata del fluido, ma ben anche all' intera massa del medesimo, potranno servirci a riconoscere le componenti ortogonali di questi sforzi.

E veramente gli integrali $\int\int pdzdy$, $\int\int pdxdz$, $\int\int pdxdy$ contenuti nelle dette equazioni, estesi a tutta la superficie del fluido, rappresenterebbero le somme, parallele agli assi, delle pressioni esercitate contro la superficie stessa dall' infuori all' indentro, ma prese negativamente; il che val quanto dire che esprimono le componenti ortogonali delle pressioni tutte esercitate dal fluido contro le pareti de' vasi che lo contengono.

Chiaro quindi apparisce che gli sforzi che dal fluido si operano contro il recipiente a seconda degli assi, altro non sono che le somme di tutte le componenti delle forze motrici corrispondenti alle velocità estinte parallelamente agli assi medesimi. E questo risultamento coincide con quanto si dedusse generalmente dal principio di D' Alembert nelle lezioni di Meccanica, parlando del moto dei sistemi in generale.

CAPITOLO II.

Del principio delle forze vive.

166. Le equazioni (B') e (Δ') del Capitolo precedente, applicate ai fluidi incompressibili, ci offrono il mezzo di dimostrare per essi il principio delle forze vive. Infatti l' integrazione della (Δ') rispetto ad s ci somministra $Vd\omega = f(t)$, rappresentando con $f(t)$ una funzione del tempo che in un istante determinato rimane costante per tutto un filamento. Osservando inoltre che $P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$ la (B') diventa

$$p = \rho C + \rho \int T ds - \rho \frac{V^2}{2} - \rho \int \left(\frac{dV}{dt}\right) ds$$

e questa potremo moltiplicarla per la quantità $Vd\omega dt = dsd\omega$, la quale per essere costante rispetto al simbolo integrale che si riferisce al filamento s, può essere posta sotto il simbolo medesimo. Si avrà perciò, facendo $\rho C d\omega ds = F(t)$

$$(\alpha) \qquad pd\omega ds = F(t) + \int T\rho d\omega ds \, . \, ds - \frac{\rho d\omega ds}{2} V^2 - \int \left(\frac{dV}{dt}\right) \rho d\omega ds ds$$

Se $p'd\omega'ds'$, $p''d\omega''ds''$ sono i valori di $pd\omega ds$ ai limiti degli integrali, comprendendovi anche il caso in cui questi limiti siano gli estremi del filamento s che va da uno ad un altro punto della superficie esteriore del fluido, otterremo

$$p''d\omega''ds'' - p'd\omega'ds' = \int_{s'}^{s''} T\rho d\omega ds . ds + \frac{\rho d\omega' ds'}{2} V'^2 - \frac{\rho d\omega'' ds''}{2} V''^2 - \int_{s'}^{s''} \left(\frac{dV}{dt}\right) \rho d\omega ds ds$$

E se osserviamo che allorquando i limiti dell' integrale variano col tempo si ha

$$\left(\frac{d. \int_{s'}^{s''} V^2 \rho d\omega ds}{dt}\right) dt = \rho d\omega'' ds'' V''^2 - \rho d\omega' ds' V'^2 + \int_{s'}^{s''} \rho d\omega ds V \left(\frac{dV}{dt}\right) dt$$

potremo scrivere la trovata equazione nel modo seguente

$$(\beta)\quad p''d\omega''ds''-p'd\omega'ds'=\int_{s'}^{s''}T\rho d\omega ds.ds-\frac{1}{2}\left(\frac{d.\int_{s'}^{s''}V^2\rho d\omega ds}{dt}\right)dt.$$

Questa ci dimostra che i momenti virtuali delle pressioni estreme p'' e p' della porzione di filamento fluido che si considera, eguagliano la somma dei momenti virtuali di tutte le forze motrici che ne animano gli elementi, diminuita della semisomma delle variazioni di forza viva che hanno avuto luogo nella porzione medesima di filamento, nel tempuscolo dt.

167. Siccome la sezione qualunque $d\omega$ si è presa normale all' asse MmM' del filamento, così estendendo gli integrali fino alla superficie esteriore, se questa non incontra l' asse del filamento ad angolo retto, ma bensì ad un angolo i, le sezioni $d\omega'$, $d\omega''$ non saranno respettivamente le $NN=d\theta'$, $N'N'=d\theta''$, ma piuttosto le $NH=d\omega'$, $N'H'=d\omega''$. Fig. 11

La pressione contro l' elemento superficiale NN verrà dunque espressa da $p'd\theta'$, ed essendo normale alla superficie $d\theta'$ sarà inclinata alla direzione del moto dell'angolo i; quindi il suo momento virtuale si esprimerà con $p'\cos.i d\theta' ds'$. Ma $d\theta'=\cos.i d\omega'$, dunque questo momento eguaglierà ancora $p'd\omega'ds'$. Nello stesso modo si troverebbe $p''d\omega''ds''=p''d\theta''ds''\cos.i'$.

168. Se con Σ si indica un simbolo sommatorio relativo a tutti i filamenti fluidi che costituiscono la massa liquida in moto, si otterrà

$$\begin{aligned}\Sigma.(p''d\omega''ds''-p'd\omega'ds')&=\Sigma.\int_{s'}^{s''}T\rho d\omega ds.ds-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{d.\int_{s'}^{s''}V^2\rho d\omega ds}{dt}\right)dt\\&=\Sigma.\int_{s'}^{s''}T\rho d\omega ds.ds-\Sigma.\left(\frac{\rho d\omega''ds''}{2}V''^2\right.\\&\quad\left.-\frac{\rho d\omega'ds'}{2}V'^2\right)-\Sigma\int_{s'}^{s''}\left(\frac{dV}{dt}\right)\rho ds d\omega ds\end{aligned}$$

dove il primo membro rappresenta la somma dei momenti virtuali, positivi o negativi di tutte le pressioni superficiali, e i secondi esprimono la somma dei momenti virtuali delle forze motrici che animano gli elementi della data massa, diminuita della semisomma delle forze vive acquistate o perdute dalla massa medesima nel tempo dt.

CAPITOLO III.

Del moto lineare in generale.

169. Per quanto siasi semplificata con diverse trasformazioni l'equazione della continuità, pure non sembra che in generale possa dedursi da essa una completa soluzione del problema del moto de' liquidi compressibili ed incompressibili animati da forze qualsivogliano.

Talvolta però, per alcune particolarità del problema, si conosce preventivamente la direzione del moto di una o più molecule, cioè le trajettorie dalle medesime descritte, ed allora non di rado assegnar si possono per esse la velocità, la pressione, e la densità in un tempo determinato.

170. Allorquando i fluidi si muovono entro recipienti di conveniente grandezza e figura è permesso con più o meno approssimazione di risguardarli come composti da una serie infinita di strati compresa da tante sezioni vicinissime normali ad una data linea che chiamasi *direttrice*, perchè parallelamente ad essa si intende diretta la velocità pressochè eguale di tutte le molecule situate nelle singole sezioni.

Si suppone parimente che la pressione, e la densità siano uniformi per tutta l'estensione di ciascun strato compreso fra due consecutive sezioni.

Se ben si osserva la natura di questo movimento ipotetico, facile è accorgersi quanto sia analogo a quello che si considerò nel filamento fluido descritto al §. (151); e non altra differenza si riscontrerà fuorchè quella che risulta dall'ampiezza della sezione trasversale del filamento, che allora supponevasi infinitesima ed eguale a $d\omega$, e nel caso attuale altro non è che la sezione finita del vaso normale alla direttrice, la quale sezione possiamo indicare con ω.

Perciò l'equazione della continuità cioè la (D') diverrà per il descritto movimento, che chiamasi *lineare*

$$(1) \qquad \omega\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d.\rho V\omega}{d\sigma}\right)=0$$

esprimendo con $d\sigma$ un elemento della direttrice la cui lunghezza variabile si indicherà con σ.

L'equazione delle forze sollecitanti applicata poscia alle molecule che scorrono lungo la direttrice sarebbe la seguente

$$(2) \qquad P = \int \frac{dp}{\rho} = C + \int T d\sigma - \frac{V^2}{2} - \int \left(\frac{dV}{dt}\right) d\sigma$$

che Per l'ammessa ipotesi dee convenire alle molecule tutte situate sulla sezione trasversale ω corrispondente al punto della direttrice che si considera.

171. Quantunque le (1) e (2) siansi dedotte con tutto il rigore dalle equazioni generali dimostrate nel Capitolo I.°, pure non credo totalmente privo di utilità il giungere direttamente alle equazioni medesime partendosi semplicemente dalla considerazione della natura del moto ipotetico che prendiamo attualmente in esame

Fig. 13

Rappresenti $NNN'N'$ un vaso entro cui un fluido si muove di moto lineare seguendo la direttrice MmM'. Si consideri il punto m corrispondente alla fine del tempo t all'arco $Mm = \sigma$ della direttrice, e si chiami ω la sezione normale nn. Ponendo $mm' = d'\sigma$, la massa fluida contenuta in quest'epoca fra le sezioni nn' ed $n'n'$ sarà $\rho\omega d'\sigma$. Se alla fine del tempo $t + dt$ sono passate queste due sezioni respettivamente in $\mu\mu$, e in $\mu'\mu'$, la stessa massa $\rho\omega d'\sigma$ dovrà essere contenuta tra le medesime nella nuova situazione che hanno preso. Converrà dunque che il volume fra esse compreso alla fine del tempo $t + dt$, moltiplicato per la corrispondente densità, eguagli tuttavia $\rho\omega d'\sigma$.

Per stabilire una tale equazione si osservi che

$$m\mu = d\sigma = Vdt\,, \quad m'\mu' = \left(V + \left(\frac{dV}{d\sigma}\right) d'\sigma\right) dt\,,$$

$$m\mu' = d'\sigma + \left(V + \left(\frac{dV}{d\sigma}\right) d'\sigma\right) dt$$

onde

$$\mu\mu' = \left(\left(\frac{dV}{d\sigma}\right) dt + 1\right) d'\sigma,$$

e che il prodotto $\rho\omega$ corrispondente alla fine del tempo $t + dt$ al punto μ diventa

$$\rho\omega + \left(\frac{d.\rho\omega}{d\sigma}\right) d\sigma + \left(\frac{d\,\rho\omega}{dt}\right) dt = \rho\omega + \left(\frac{d\,\rho\omega}{d\sigma}\right) d\sigma + \omega \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dt,$$

per essere ω costante rispetto al tempo. Si potrà dunque porre

$$\rho\omega d'\sigma = \left(\rho\omega + \left(\frac{d.\rho\omega}{d\sigma}\right) V dt + \omega \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dt\right) \left(\left(\frac{dV}{d\sigma}\right) d'\sigma dt + d'\sigma\right)$$

da cui trascurando i termini che contengono infinitesimi di ordini superiori, si trae l'equazione (1) superiormente scritta.

172. Rispetto poi all'equazione (2) essa risulta dal considerare una porzione prismatica dello strato $nn'n'$ avente mm' per asse e una base qualunque β. Infatti il volume di un tal prismetto sarà $\beta d'\sigma$, la forza impressa parallelamente alla direttrice, $T\beta\rho d'\sigma$; la forza perduta corrispondentemente all'aumento attuale di velocità, $\frac{\delta V}{dt}\beta\rho d'\sigma$; la differenza delle pressioni contro le due basi $\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)\beta d'\sigma$; e però si avrà

$$\beta\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)d'\sigma = T\rho\beta d'\sigma - \frac{\delta V}{dt}\rho\beta d'\sigma$$

Che divisa per $\beta\rho d'\sigma$, e moltiplicata per $d\sigma = Vdt$ ci somministra dopo l'integrazione la (2). Si potrebbe poi impunemente porre fra gli stessi limiti $\int Td\sigma = \int Td'\sigma$ indicando con $d'\sigma$, un aumento indeterminato dalla direttrice, purchè fosse dello stesso segno del $d\sigma$, e così la (2) si ridurrebbe alla

$$(2') \qquad P = C + \int Td'\sigma - \frac{V^2}{2} - \int\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

dove l'integrazione si effettua lungo la direttrice nel senso del moto.

Se invece l'integrazione avesse luogo nel senso della direttrice ma in contrario verso al movimento, il $d'\sigma$ dovrebbe avere un segno diverso del $d\sigma$ e perciò si avrebbe

$$P = C - \int Td'\sigma - \frac{V^2}{2} + \int\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

173. Le equazioni (1) e (2) si rendono di un uso ancor più facile quando si applicano ai fluidi incompressibili, imperocchè la (1) colla supposizione di ρ costante si trasforma nella

$$\left(\frac{d.\omega V}{d\sigma}\right) = 0$$

il cui integrale è

$$(3) \qquad \omega V = f(t)$$

e la (2) nella

$$(4) \qquad \frac{p}{\rho} = C + \int Td'\sigma - \frac{V^2}{2} - \int\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

Prima però di discutere queste ultime equazioni conviene stabilire parecchie denominazioni che contribuiranno a rendere più agevole l'intelligenza di quanto siamo per esporre.

174. Rappresenti $LLL'L'$ un recipiente terminato da superficie Fig. 13
continue entro cui un fluido imcompressibile possa scorrere di moto lineare seguendo la direttrice AsB. Siano m, ed m^1 le sezioni del vaso normali alla direttrice corrispondenti alla suprema ed infima del liquido, e quindi variabili col tempo; ω ed ω' due sezioni qualunque del vaso fatte esse pure normalmente alla direttrice nello spazio occupato dal fluido; n l'area di una simile sezione determinata del vaso, che può essere l'inferiore.

Essendo A e B due punti fissi della direttrice, ritenendo il moto diretto da A in B, e quindi calcolandosi gli archi della direttrice medesima dal punto A a venire verso B, pongasi

$$A\sigma=\sigma,\quad A\sigma_1=\sigma_1,\quad As=s,\quad As'=s'$$

$$B\sigma=\lambda\quad B\sigma_1=\lambda_1,\quad Bs=l,\quad Bs'=l'.$$

Si denotino finalmente con V e V^1 le velocità alle sezioni ω ed ω_1 e con p, p_1 le pressioni corrispondenti; con W W' le velocità alle sezioni estreme m ed m' del fluido ove hanno luogo le pressioni π, e π'; con U la velocità che corrisponderebbe alla sezione infima del vaso n, quando anche per essa scorresse il liquido, mantenendosi continuo; per cui si avrà

$$(5)\qquad V=\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{d\lambda}{dt},\qquad V_1=\frac{d\sigma_1}{dt}=-\frac{d\lambda_1}{dt}$$

$$W=\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{dl}{dt},\qquad W'=\frac{ds'}{dt}=-\frac{dl'}{dt}.$$

175. Evidentemente la (3) che vale per una sezione qualunque ci somministra

$$(5')\qquad nU=\omega V=\omega_1V_1=mW=m'W'=f(t)$$

da cui si trae $\omega : \omega_1 :: V_1 : V$

e perciò si concluderà che le ampiezze delle sezioni sono inversamente proporzionali alle corrispondenti velocità del fluido che passa per esse. Facile ancora sarà il dedurre dalle medesime la seguente

$$(6)\qquad nUdt=mds=-mdl=m'ds'=\omega d\sigma=-\omega d\lambda=\text{etc.}$$

176. Ripigliando ora la (4), estendendone gli integrali dalla se-

zione ω alla ω_1, ed indicando con h ed h_1 le altezze cui sono dovute le velocità V e V_1, si otterrà

$$(7)\qquad \frac{p_1-p}{\rho}=\int_{\sigma}^{\sigma_1} Td'\sigma+g(h-h_1)-\int_{\sigma}^{\sigma'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

177. Moltiplicandola invece per la quantità $\rho\omega d\sigma$, costante rispetto al simbolo $\int$, e posto $C\rho\omega d\sigma=C'$, ne trarremo

$$p\omega d\sigma=C'+\int T\rho\omega d\sigma d'\sigma-\rho\frac{V^2}{2}\omega d\sigma-\int\left(\frac{dV}{dt}\right)\rho\omega d\sigma d'\sigma.$$

Ed estendendo l' integrale dalla sezione m alla m' si avrà

$$\pi'm'ds'-\pi mds=\int_{s}^{s'} Td'\sigma.\rho\omega d\sigma+\frac{W^2}{2}\rho mds-\frac{W'^2}{2}\rho m'ds'$$
$$-\int_{s}^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)\rho d\omega d\sigma d\sigma'$$

cioè

$$(7)\qquad \pi'm'ds'-\pi mds=\int_{s}^{s'} Td'\sigma.\rho\omega d\sigma-\left(\frac{d\int_{s}^{s'}\frac{V^2}{2}\rho\omega d'\sigma}{dt}\right)dt$$

in cui si legge l' enunciato del principio delle forze vive, poichè ben si vede che i momenti virtuali delle pressioni estreme π e π' esercitate alle superficie estreme m ed m' unitamente ai momenti delle forze motrici che animano parallelamente alla direttrice tutti gli strati componenti la massa fluida, egualiano in un dato istante la variazione avvenuta alla semisomma delle forze vive degli strati medesimi nel tempuscolo dt. Questo interessante teorema poteva immediatamente dedursi da quello del §. (166). Qualora si fossero estesi gli integrali soltanto fra le due sezioni ω e ω_1, si sarebbe ottenuto

$$p_1\omega_1 d\sigma_1-p\omega d\sigma=\int_{\sigma}^{\sigma_1} Td'\sigma\rho\omega d\sigma-\left(\frac{d\int_{\sigma}^{\sigma_1}\frac{V^2}{2}\rho\omega d'\sigma}{dt}\right)dt$$

178 Siccome l' equazione (4) deve verificarsi altresì per le sezioni estreme m, m', se ne dedurranno le due seguenti

$$(8)\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+\int_{s}^{\sigma} Td'\sigma-\frac{V^2}{2}+\frac{W^2}{2}-\int_{s}^{\sigma}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma,\qquad e$$

$$(9)\qquad \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_{s}^{s'} Td'\sigma-\frac{W'^2}{2}+\frac{W^2}{2}-\int_{s}^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma.$$

Esprimendo le velocità tutte in funzione della sola U mediante le (5'), osservando che per essere n, ed ω indipendenti dal tempo si ha

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{n}{\omega}\left(\frac{dU}{dt}\right),$$

e togliendo dal simbolo integrale che si riferisce soltanto agli archi della direttrice le quantità n, e $\left(\frac{dU}{dt}\right)=\frac{dU}{dt}$, otterremo

$$(10)\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+\int_s^\sigma Td'\sigma-\frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{m^2}\right)-n\frac{dU}{dt}\int_s^\sigma\frac{d'\sigma}{\omega}$$

$$(11)\qquad \frac{\pi'-\pi}{l}=\int_s^{s'}Td'\sigma-\frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{m'^2}-\frac{1}{m^2}\right)-n\frac{dU}{dt}\int_s^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega}$$

da cui, posto

$$L=\int_s^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega}=\int_{l'}^{l}\frac{d'\lambda}{\omega},\qquad S=\int_\sigma^s\frac{d'\sigma}{\omega}=\int_\lambda^l\frac{d'\lambda}{\omega}$$

ed eliminando il $\frac{dU}{dt}$, si ricava

$$(12)\qquad p=\pi+\frac{S}{L}(\pi'-\pi)-\frac{S}{L}\rho\int_s^\sigma Td'\sigma+\rho\int_s^{s'}Td'\sigma$$
$$+\rho\,\frac{n^2U^2}{2}\left(\left(\frac{1}{m'^2}-\frac{1}{m^2}\right)\frac{S}{L}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{m^2}\right).$$

179. Quando si conosca il volume A del fluido, e sia nota la figura del vaso e della direttrice, le sezioni m ed m' saranno funzioni rispettivamente di s ed s'; e poichè il dato volume del liquido è rappresentato dall'integrale definito $\int_s^{s'}\omega d'\sigma$, così si otterrà l'equazione $A=\int_s^{s'}\omega d'\sigma$ che somministra una relazione fra s ed s', e perciò le sezioni m ed m' potranno considerarsi come funzioni della sola s. Lo stesso si dica degli integrali definiti $\int_s^{s'}Td'\sigma$, e $\int_s^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega}$ che sono funzioni de' limiti loro, per cui l'equazione (11), sostituendovi per dt il suo valore tratto dalle (5) cioè

$$(13)\qquad dt=\frac{mds}{nU}$$

diverrà un equazione differenziale fra s ed U, mediante la quale si dovrà assegnare il valore di una di queste quantità espressa per l'altra. Ripigliando quindi la (13) facile sarà l'ottenere U espresso per t, da cui se ne dedurrà la velocità in una sezione qualunque in funzione del tempo, e la situazione della superficie suprema del fluido in un istante determinato.

180. La (10) servirà poscia ad assegnare il valore della pressione per una sezione ω corrispondente ad un qualsivoglia arco σ della direttrice. Che se il valore di p tratto dalla medesima resultasse negativo, converrebbe concludere che gli strati fluidi tendono a separarsi gli uni dagli altri nonchè dalle pareti del vaso; e però le equazioni soprascritte, desunte dall'ipotesi che il liquido sia obbligato a scorrere in massa continua entro il recipiente dato, non sarebbero più adattate a rappresentare il movimento che esso realmente concepisce.

181. Il metodo generale indicato al §. (165) per determinare gli sforzi operati contro il recipiente dal fluido che per esso si muove, si potrà applicare anche al caso presente; giacchè quì pure le somme delle componenti delle forze motrici perdute dal fluido parallelamente agli assi, eguaglieranno le componenti rettangolari de' richiesti sforzi. cioè delle pressioni tutte esercitate dal fluido in moto contro le faccie interne del recipiente.

Riferendo quindi il sistema a tre assi ortogonali, indicando le coordinate dei punti s, σ, ed s' respettivamente con x',y',z', x,y,z ed x'',y'',z''; con $F\cos.\widehat{fx}$, $F\cos.\widehat{fy}$, $F\cos.\widehat{fz}$ le componenti rettangole degli sforzi; con $d\mu = \rho\omega d\sigma$ la massa costante di uno strato fluido che passa per una sezione qualunque nel tempuscolo dt; e ponendo finalmente

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{d\sigma}, \quad \cos.\beta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad \cos.\gamma = \frac{dz}{d\sigma}$$

si avrà

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} F\cos.\widehat{fx} &= \int \left(X - \frac{\delta . V\cos.\alpha}{dt} \right) d\mu, \\ F\cos.\widehat{fy} &= \int \left(Y - \frac{\delta . V\cos\beta}{dt} \right) d\mu, \\ F\cos.\widehat{fz} &= \int \left(Z - \frac{\delta\, V\cos\gamma}{dt} \right) d\mu. \end{aligned} \right.$$

182. Osservando che $V = \frac{Un}{\omega}$, che n è costante, che U varia solo al variar del tempo, e che $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ sono indipendenti dal tempo, e cangiano soltanto da punto a punto della direttrice, si otterrà

$$\frac{\delta . V\cos.\alpha}{dt} = \frac{dU}{dt}\frac{n}{\omega}\cos.\alpha + Un\left(\frac{d.\frac{\cos.\alpha}{\omega}}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma}{dt}$$

$$= \frac{dU}{dt}\frac{n}{\omega}\cos.\alpha + \frac{U^2n^2}{\omega}\left(\frac{d.\frac{\cos.\alpha}{\omega}}{d\sigma}\right).$$

Sostituendo questo e gli analoghi valori nella (14), ed integrando dalla sezione m alla sezione m', cioè da un estremo all' altro della massa fluida, e rappresentando con A, B, C ed A', B', C' i valori degli angoli α, β, γ corrispondenti a questi estremi, avremo

$$(15)\left\{\begin{aligned} F\cos.\widehat{fx} &= \int_s^{s'} Xd\mu - \rho\frac{dU}{dt}n(x''-x') - \rho n^2U^2\left(\frac{\cos.A'}{m'} - \frac{\cos.A}{m}\right)\\ F\cos.\widehat{fy} &= \int_s^{s'} Yd\mu - \rho\frac{dU}{dt}n(y''-y') - \rho n^2U^2\left(\frac{\cos.B'}{m'} - \frac{\cos.B}{m}\right)\\ F\cos.\widehat{fz} &= \int_s^{s'} Zd\mu - \rho\frac{dU}{dt}n(z''-z') - \rho n^2U^2\left(\frac{\cos C'}{m'} - \frac{\cos C}{m}\right)\end{aligned}\right.$$

183. Tutte le trovate formule, sostituendovi in luogo di ω, m, n ec., $d\omega$, dm, dn ec., converrebbero anche al moto di un fluido incompressibile considerato ne'varii filamenti descritti nel §. 151., a sezione infinitesima variabile per gradi continui, imperocchè le equazioni che racchiudono le leggi dell' uno e l'altro movimento, sono della stessa forma; il che val quanto dire, perche il moto per i singoli sottilissimi filamenti deve considerarsi come lineare.

CAPITOLO III.

Del moto di un fluido incompressibile in un vaso semplice inesausto.

184. Chiamansi *semplici* o *continui* que' vasi, in cui le successive sezioni trasversali cangiano di ampiezza per gradi insensi-

bili, seguendo cioè la legge di continuità; si dicono poi *composti* o *discontinui* quei recipienti in cui le successive sezioni trasversali cangiano di grandezza saltuariamente. Ne' primi il limite del rapporto fra due consecutive sezioni ha per valore l'unità, e la sezione longitudinale di essi è terminata lateralmente da linee continue; ne' secondi invece queste linee sono discontinue.

Quando un fluido grave muovesi per un vaso continuo simmetrico intorno ad un asse verticale l'esperienza dimostra ammissibile l'ipotesi del moto lineare; e poichè in tal caso la direttrice è una retta verticale, così gli strati fluidi che l'uno all'altro si succedono saranno tutti paralleli ed orizzontali. Coloro che ammettono il moto lineare soltanto in circostanze analoghe a queste, sogliono anche denominarlo moto a strati paralleli.

185. Scorra dunque un liquido grave entro un recipiente ad asse verticale sgorgando dall' infima sezione orizzontale n con velocità prossimamente parallele all'asse. Di più si supponga che agli strati superiori del liquido che vanno abbassandosi, successivamente subentrino altri strati eguali ed animati dalle stesse velocità; con che si verrà a mantenere costante la distanza tra il livello supremo del liquido e la sezione inferiore.

Tenute le denominazioni dell' antecedente capitolo, e di più detta g la gravità; assunto l' asse del vaso per asse delle z volto dall'alto al basso, e indicata con ζ la distanza tra la sezione suprema e l' infima, avremo evidentemente

$$m' = n, \quad d'\sigma = d'z, \quad \int_s^{s'} T d'\sigma = \int_{z'}^{z''} g d'z = g\zeta = \textit{costante},$$

$$\int_s^{\sigma} T d'\sigma = \int_{z'}^{z} g dz = g(z - z'), \; L = \int_0^{\zeta} \frac{d'z}{\omega}, \quad S = \int_{z'}^{z} \frac{d'z}{\omega}$$

e però le (10), (11), e (12) si ridurranno alle seguenti

$$(a) \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g(z - z') - \frac{n^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{m^2}\right) - n\frac{dU}{dt}\int_{z'}^{z} \frac{d'z}{\omega}$$

$$(b) \qquad \frac{\pi' - \pi}{\rho} = g\zeta - \frac{n^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) - \frac{ndU}{dt}\int_0^{\zeta} \frac{d'z}{\omega}$$

$$(c) \qquad p = \pi + \frac{S}{L}(\pi' - \pi) - \rho g \frac{S}{L}\zeta + \rho g(z - z') + \frac{\rho n^2 U^2}{2}\left(\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\frac{S}{L} - \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{m^2}\right)\right).$$

186. Risolvendo la (b) rispetto a dt e ponendo per brevità

$$a=2n\int_0^\zeta\frac{dz}{\omega},\quad b=2\left(\frac{\pi-\pi'}{\rho}+g\zeta\right),\quad c=\frac{n^2}{m^2}-1$$

otterremo

$$(d)\qquad dt=\frac{adU}{b+cU^2}$$

dalla integrazione della quale si potrà ricavare il valore di t espresso per U, e viceversa.

Nell' applicazione di questa formula conviene però distinguere tre casi; cioè quando c è positivo, zero, o negativo; che corrispondono all' essere $m<n$, $m=n$, $m>n$.

187. Nel primo caso integrando in guisa che allorquando $t=0$ sia $U=0$, avremo

$$t=\frac{a}{\sqrt{bc}}\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=U\sqrt{\frac{c}{b}}\right),\qquad \text{ed}\qquad U=\sqrt{\frac{b}{c}}\,\text{tang.}\frac{\sqrt{bc}}{a}\,t$$

dalle quali si scorge che la velocità U cresce rapidissimamente col tempo, diventando infinita quando $\frac{\sqrt{bc}}{a}\,t=\frac{\varpi}{2}=90°$.

188. Nel secondo caso quando $c=0$ si avrà

$$t=\frac{a}{b}U,\quad \text{ossia}\quad U=\frac{\frac{\pi-\pi'}{\rho}+g\zeta}{n\int_0^\zeta\frac{d'\rho}{\omega}}$$

che ci mostrano la velocità crescere proporzionalmente al tempo; per cui potremo asserire che il liquido sgorga dalla sezione infima di moto uniformemente accelerato.

Se le pressioni esteriori alle sezioni estreme fossero eguali, si avrebbe $\pi=\pi'$, onde $U=\dfrac{g\zeta}{n\int_0^\zeta\frac{d'z}{\omega}}$; e se il vaso è prismatico $U=gt$, per cui l' accelerazione dell' efflusso sarà dovuta alla sola gravità.

189. Venendo finalmente al caso in cui c è negativo, che è il più facile ad incontrarsi nelle applicazioni, ponendo $\gamma=-c=1-\frac{n^2}{m^2}$, $e=2{,}718282$, ed integrando in guisa che a $t=0$ corrisponda $U=0$ si avrà

$$t=\frac{a}{2\sqrt{b\gamma}}\log.\frac{\sqrt{b}+U\sqrt{\gamma}}{\sqrt{b}-U\sqrt{\gamma}}$$

da cui ponendo

$$\frac{\sqrt{b\gamma}}{a}=k=\frac{\left(\frac{\pi-\pi'}{\rho}+g\zeta\right)\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)}{n\int_0^\zeta\frac{d'z}{\omega}}$$ si ottiene

$$(e)\qquad U=\sqrt{\frac{b}{\gamma}}\,\frac{e^{2kt}-1}{e^{2kt}+1}=\sqrt{\frac{b}{\gamma}}\,\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{kt}+e^{-kt}}$$

Questa espressione, facendovi $\gamma=0$, riducesi alla forma $\frac{0}{0}$; ma determinandone il valore coi noti metodi si trova per U lo stesso valore del paragrafo precedente.

190, Allorchè la sezione suprema m supera notabilmente la infima n, il numero $\frac{n^2}{m^2}$ è piccolissimo, e però γ è pochissimo differente dall' unità. E se l'altezza ζ è considerabile, generalmente parlando, a sarà piccolissimo in confronto di b, e però k sarà un numero grande e ben presto, col crescere del tempo, l' unità potrà trascurarsi in confronto di e^{2kt}. Quindi il valore della velocità si accosterà al limite

$$(f)\qquad U=\sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi-\pi'}{\rho}+g\zeta\right)}{1-\frac{n^2}{m^2}}}$$

senza però giungervi mai rigorosamente.

Se le pressioni estreme π e π' sono eguali, il valore di questo limite diventa

$$(f')\qquad U=\sqrt{\frac{2g\zeta}{1-\frac{n^2}{m^2}}}$$

Dunque, facendo astrazione dai primi momenti dell' efflusso, il moto del fluido è uniforme, e la sua velocità è quella stessa che si dedurrebbe dall' equazione (b), ponendovi $\frac{dU}{dt}=0$; supponendovi cioè il moto ridotto a stato permanente, e in conseguenza invariabile col tempo la velocità dell' efflusso

Il trovato valore della velocità fondato sull' ipotesi di m molto grande in confronto di n, contiene soltanto l' altezza ζ del fluido al di sopra dell' infima sezione, ed il rapporto $\frac{n}{m}$ tra quest' ultima sezione e la suprema. Che se m fosse tanto ampio in confronto di n che il numero $\frac{n^2}{m^2}$ si rendesse trascurabile rispetto all' unità, allora la celerità dell' efflusso verrebbe data dalla formula semplicissima

$$U=\sqrt{2g\zeta}, \tag{g}$$

sicchè sarebbe dovuta soltanto all' altezza dell' acqua sovraincombente.

191. È utile il determinare la quantità d' acqua che sorte dall' infima sezione del vaso in un tempo t, la quale quantità suole chiamarsi *portata*. A tale oggetto si osservi che avendo supposto che tutte le molecule sortano dal recipiente con velocità eguali e prossimamente parallele all' asse, in un tempuscolo dt sgorgherà un prisma di liquido avente Udt per altezza ed n per base; onde, indicandone con dq la massa, si avrà $dq=n\rho Udt$; e quindi

$$q=n\rho\int_0^t Udt$$

rappresenterà la massa liquida sgorgata dal principio dell' efflusso fino alla fine del tempo t che si considera. Sostituendo in questa espressione il valore di U tratto dalla (e) ed integrando si otterrà

$$q=\frac{n\rho}{k}\sqrt{\frac{b}{\gamma}}\log.\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)+cost.$$

ed estendendo l' integrale in guisa che a $t=0$ corrisponda $q=0$

$$q=\frac{a}{\gamma}n\rho\log.\frac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right). \tag{h}$$

Alla fine di un certo tempo si potrà trascurare il secondo esponenziale rispetto al primo, e si avrà semplicemente

$$q=\sqrt{\frac{b}{\gamma}}.n\rho t-\frac{a}{\gamma}n\rho\log.2$$

ossia

$$q = n\rho t \sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi - \pi}{\rho} + g\zeta\right)}{1 - \frac{n^2}{m^2}} - \frac{2n^2\rho\int_0^\zeta \frac{d'z}{\omega}.\log.2}{1 - \frac{n^2}{m^2}}}$$

Il primo termine è la massa che corrisponderebbe all' efflusso costante dovuto alla velocità finale (f); ma la vera massa sgorgata è più piccola, perchè al principio dell'efflusso il valore variabile di U è minore di questa velocità finale.

192. Se ora ci proporremo di assegnare l' intensità della pressione in una sezione qualunque, converrà sostituire nella (a) e nella (c) il valore di U superiormente trovato: e chiamando h ed H le altezze cui sarebbero dovute le velocità V e W relative alle superficie ω ed m, la (a) potrà ridursi alla seguente

$$(k) \qquad p = \pi + g\rho(z - z') - g\rho(h - H) - \rho n \frac{dU}{dt}\int_{z'}^{z} \frac{d'z}{\omega}$$

il qual valore, quando l' efflusso è ridotto a stato permanente per cui si abbia $\frac{dU}{dt} = 0$, ci dimostra che in una sezione qualunque ω, la pressione è misurata dalla pressione superficiale accresciuta del peso di un prisma di liquido, avente per altezza la profondità della sezione che si considera dal supremo livello, diminuita della differenza fra le altezze cui sono dovute le velocità della sezione ω e della sezione superiore.

193. Se finalmente assegnar si volessero le intensità degli sforzi che sopporta il recipiente nel senso dei tre assi ortogonali, tenute ferme le denominazioni del §. 181 si avrebbe pel caso che ora contempliamo

$$z'' - z' = \zeta, \quad x'' - x' = 0, \quad y'' - y' = 0,$$

$$\cos.A' = \cos.A = \cos.B' = \cos.B = 0,$$

$$\cos.C' = \cos.C = 1,$$

$$\int Z d\mu = g\rho \int_s^{s'} \omega d\sigma = P,$$

chiamando P il peso di tutto il liquido contenuto nel vaso; onde se ne dovrà concludere

$$F\cos.\widehat{fx}=0\,,\quad F\cos.\widehat{fy}=0$$

$$F\cos.\widehat{fz}=P-\rho n\frac{dU}{dt}\zeta-\rho n^2U^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right).$$

E quando il moto è ridotto a stato permanente

$$F\cos.\widehat{fz}=P-\rho\frac{n}{m}U^2(m-n)=P-2\rho g\zeta\frac{nm}{m+n}\,.$$

Dalle quali espressioni si scorge che il vaso non sostiene altro sforzo fuorchè nel senso verticale, distruggendosi scamblevolmente le componenti orizzontali delle pressioni.

Se la sezione infima è piccolissima in confronto della suprema, si otterrà semplicemente

$$F\cos.\widehat{fz}=P-2\rho g\zeta n:$$

cioè, lo sforzo esercitato dal fluido contro il vaso nel senso dell'asse verticale, eguaglia il peso del fluido stesso, diminuito del doppio peso della colonna prismatica liquida insistente sulla sezione dello sbocco.

194. Tutto ciò che si è detto dal §. 185 al 192 è tuttavia applicabile al moto de' liquidi gravi per tubi strettissimi, curvilinei, inesausti, e colla sezione dello sbocco comunque inclinata all'orizzonte, perchè in essi può supporsi il moto lineare. Soltanto si avverta che nei valori di L ed N non si potrà sostituire al $d'\sigma$, il $d'z$, ma converrà invece porvi $d'\sigma=\frac{d'z}{\cos.\gamma}$, rappresentando con γ l'angolo variabile che forma l'asse del filamento colla verticale. Annullandosi però i termini che contengono questi integrali quando il moto è ridotto permanente, i valori della velocità finale costante dell'efflusso saranno identici a quelli trovati. La misura poi degli sforzi che sostengono codesti tubetti parallelamente agli assi si calcolerà colle formule del §. 182 come ne vedremo in seguito degli esempi.

195. Premesse queste considerazioni non è quindi malagevole l'applicazione delle esposte teorie al moto de' liquidi gravi per vasi semplici, inesausti, non simmetrici intorno ad un asse, e col piano della sezione dello sbocco inclinato comunque alla verticale.

Suppongasi da prima che il piano della luce infima sia verticale, e se ne indichi al solito con n l'ampiezza. Quando il recipiente sia alimentato con afflusso perenne di nuovo liquido, in guisa che il supremo livello non si abbassi, si potrà immaginare l'efflusso per la sezione n come se avesse luogo per tanti tubetti fissi, entro cui scorrono dei filamenti fluidi aventi dn per sezione infima e dm per sezione suprema; nè sarà lungi dal vero il supporre il rapporto $\frac{dn}{dm}$ non molto diverso dal rapporto $\frac{n}{m}$.

A tutto rigore non possiamo asserire che la superficie suprema, in questo genere di movimento, rimanga orizzontale, perchè la natura di una tal superficie deve essere determinata dalla condizione che per essa la pressione sia costante ed eguale a π. E a ciò in generale non può soddisfarsi nel moto a filamenti curvilinei con una superficie piana orizzontale; poichè i filamenti curvi che si trovano più verso la convessità risentono, per causa della forza centrifuga, una pressione maggiore di quella che soffrono i filamenti situati verso la concavità; e quindi l'altezza del liquido che loro immediatamente sovrasta, ed il rapporto $\frac{dn}{d\omega}$, devono essere tali da poter dar luogo ad un aumento di pressione che contrabilanci quello dovuto alla forza centrifuga. Senza però entrare in ulteriori dettagli sù tale difficile argomento, farò soltanto osservare, a prova del nostro asserto, che l'equazione (*K*) §. 159 della superficie libera, postovi $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, e ridotto il moto a stato permanente, diventa

$$-\frac{du}{dt}\,d'x-\frac{dv}{dt}d'y+\left(g-\frac{dw}{dt}\right)\,d'z=0$$

ossia

$$\frac{d.V\cos.\alpha}{dt}\,d'x+\frac{d\,V\cos.\beta}{dt}\,d'y-\left(g-\frac{d.V\cos.\gamma}{dt}\right)d'z=0$$

la quale rappresenta in generale una superficie curva, quando α, β, γ sono angoli variabili da molecula a molecula, cioè quando i filamenti fluidi sono diversamente incurvati rispetto agli assi.

Ma allorchè si faccia astrazione dalla velocità delle molecule nel senso orizzontale per cui sia $\cos.\alpha=0$, $\cos.\beta=0$, essa si ridurrà a $d'z = 0$, equazione che appartiene ad una superficie piana orizzontale. In tutti gli altri casi la superficie suprema deve essere tale che la di lei normale coincida colla direzione della risultante della gravità, della forza acceleratrice $\frac{-dr'}{dt}$, e della forza centrifuga $\frac{r'^2}{r}$, relative alla molecula che si prende ad esame, e però non può essere un piano orizzontale.

196. Tutte le esposte considerazioni ci portano quindi a concludere che il liquido sgorga dalla sezione n con velocità diversa per ciascun suo elemento dn, dipendentemente dalla forma del filamento percorso, e dipendentemente dall' altezza ζ del liquido che le sovrasta, la quale altezza è differente per i differenti filamenti. Una delle trovate espressioni di U convenientemente scelta somministrerebbe per ciascuno di essi la velocità dell' efflusso nei varii casi in cui il moto suppongasi variabile o permanente, e secondo che il rapporto $\frac{dn}{dm}$ è comparabile, o no, coll' unità.

Per ottenere la quantità d' acqua che sbocca dalla sezione n nel tempuscolo dt, che indicheremo con $\left(\frac{dq}{dt}\right)dt$, basterà integrare la formula $Udndt$ rispetto all' area della sezione medesima, e si avrà

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)dt = dt\int Udn\,.$$

197. Se si esprime con H l' *altezza media* cioè quell' altezza cui sarebbe dovuta la velocità U_1 colla quale il liquido dovrebbe uscire da tutta la sezione n perchè nel tempo dt ne sgorgasse tanto quanto realmente ne sbocca dall' area medesima ma animato da differenti velocità ne' suoi elementi, otterremo

$$(i) \qquad U_1 n = \int Udn, \text{ ed } \quad H = \frac{(\int Udn)^2}{2gn^2}$$

Per determinare la portata in un tempo t converrebbe integrare il valore di $\left(\frac{dq}{dt}\right)dt$ rispetto a t, e si avrebbe

$$(l) \qquad q = \int dt \int Udn = n\int U_1 dt\,;$$

e allorchè il moto è ridotto a stato permanente, essendo U_1 costante, una tale espressione riducesi a

$$q = t\int U dn = t U_1 n\,.$$

198. Tutte queste formule si calcoleranno ponendovi per U i competenti valori; ma per ora limitandoci all'ipotesi del moto permanente, e della piccolezza del rapporto $\left(\frac{dn}{dm}\right)^2$ infaccia all'unità risulterà (190.)

$$(\mathrm{I}) \qquad H = \frac{\left(\int \sqrt{\frac{\pi-\pi'}{g\rho} + \zeta}\,.\,dn\right)^2}{n^2}$$

$$(\mathrm{I}') \qquad \text{e se } \pi = \pi', \qquad H = \left(\frac{\int \sqrt{\zeta}\,.\,dn}{n}\right)^2$$

Fig. 14 199. Condotto per il punto supremo h' della luce n un asse orizzontale $\gamma\gamma$, ed un asse verticale $h'\mu$, che può prolungarsi fino ad incontrare in A il supremo livello, e posto $Ah' = h'$, e detta μ l'ascissa verticale dell'elemento dn che si considera, si potrà fare $H = h' + \mu_1$, e $\zeta = h' + \mu$; e se h' è molto grande in confronto di μ_1 e di μ, si determinerà il valore di μ_1, cioè la profondità sotto h' del punto della sezione n che corrisponderebbe all'altezza media.

Infatti in tale ipotesi sarà prossimamente

$$\sqrt{H} = h'^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\mu_1 h'^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{e} \quad \sqrt{\zeta} = h'^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\mu h'^{-\frac{1}{2}}$$

per cui dalla formula (I') si otterrà

$$h'^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}h'^{-\frac{1}{2}}\mu_1 = \frac{nh'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h'^{-\frac{1}{2}}\int \mu dn}{n}$$

e quindi

$$\mu_1 = \frac{\int \mu dn}{n}$$

dal qual valore si rileva che l'altezza media coincide colla distanza del centro di gravità della sezione n dal livello superiore del liquido. E però le formule che si trovarono al §. 190 relative alla celerità dell'efflusso per una luce n orizzontale, piccola in confronto della sezione suprema m, che ne dista dell'altezza verticale ζ grande rispetto alle dimensioni di n, potranno anche servire per gli efflussi laterali da piccole luci il cui centro di figura sia ad una notabile profondità ζ dal supremo livello.

Se il piano della luce fosse obbliquo con analogo calcolo si giungerebbe ai medesimi risultamenti.

200. Proponiamoci ora di mostrare come applicar si possano ne' varj casi le formule con cui si calcola l'altezza media; e a tal uopo supponiamo che la sezione n sia simmetrica intorno all'asse verticale Ah', e che la linea che ne determina il contorno sia rappresentata dalla $\mu = f(\zeta)$.

Osservando che in tale ipotesi si ha $dn = d\mu d\zeta$, e posto $Ah = h$, ed $h - h' = k$, si otterrà

$$(\mathrm{II}) \qquad H = \left(\frac{2\int_{h'}^{h} d\zeta \int_{0}^{\mu} \sqrt{\frac{\pi - \pi'}{g\rho} + \zeta} . d\mu}{n} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2\int_{h'}^{h} \mu \sqrt{\frac{\pi - \pi'}{g\rho} + \zeta} . d\zeta}{n} \right)^2$$

le quali generalmente parlando somministreranno, a integrazione compita, H in funzione di h ed h', ossia di h e k. Queste espressioni riduconsi più semplici quando $\pi = \pi'$; ed infatti diventano

$$(\mathrm{II}') \quad H = \left(\frac{2\int_{h'}^{h} d\zeta \int_{0}^{\mu} \sqrt{\zeta} . d\mu}{n} \right)^2 = \left(\frac{2\int_{h'}^{h} \mu \sqrt{\zeta} . d\zeta}{n} \right)^2$$

201. Sia n una luce trapezoidale i cui lati obliqui abbiano per equazione $\pm \mu = \alpha\zeta + \beta$. Si indichino con $2a$ e $2b$ i lati paralleli orizzontali inferiore e superiore. Avremo

$$\alpha = \frac{a - b}{h - h'}, \qquad \beta = \frac{bh - ah'}{h - h'}.$$

sarà quindi

$$(\mathrm{III}) \; H = \left[\frac{\frac{2}{5}(a - b)\left(h^{\frac{5}{2}} - h'^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{2}{3}(bh - ah')\left(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}} \right)}{(h - h')^2 \frac{(a + b)}{2}} \right]^2$$

Se la base suprema è a fior d'acqua, cioè se si ha $h'=0$ riducesi ad

$$H=\frac{16}{225}\left(\frac{3a+2b}{a+b}\right)^2 h$$

202. Se la luce n è un rettangolo a base orizzontale si avrà $a=b$, e perciò

$$H=\frac{4}{9}\left(\frac{h^{\frac{3}{2}}-h'^{\frac{3}{2}}}{h-h'}\right)^2$$

e quando $h'=0$

$$H=\frac{4}{9}\,h.$$

203. Se la n è un triangolo colla base orizzontale in basso, e il vertice in alto, il valore di H riducesi ad

$$H=\frac{16}{225}\left[\frac{2\,h'^{\frac{5}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}-5h'h^{\frac{3}{2}}}{(h-h')^2}\right]^2$$

e se $h'=0$

$$H=\frac{16}{25}\,h.$$

204. Se finalmente la luce n è un triangolo colla base orizzontale in alto ed il vertice in basso

$$H=\frac{16}{225}\left[\frac{2h^{\frac{5}{2}}+3h'^{\frac{5}{2}}-5hh'^{\frac{3}{2}}}{(h-h')^2}\right]^2$$

e quando $h'=0$

$$H=\frac{64}{225}\,h.$$

Fig 15 205. Se la figura della sezione dello sbocco fosse un circolo verticale di raggio a, e il cui centro rimanesse distante dal supremo livello della lunghezza $k=h'+a$, indicando con φ l'angolo che forma un raggio qualunque ocb colla verticale, e rappresentando con $co=r$ una porzione qualsivoglia del raggio medesimo, si avrà $dn = dr d\varphi$, e $\zeta = Af = k + r\cos.\varphi$; onde le (*i*) si ridurranno alle seguenti

$$U_1 \varpi a^2 = 2\int_0^{\varpi} d\varphi \int_0^a \sqrt{2g(k + r\cos.\varphi)}\, r dr$$

$$\text{ed}\quad H = \left[\frac{2\sqrt{k}\int_0^{\varpi} d\varphi \int_0^a \sqrt{1 + \frac{r}{k}\cos.\varphi}\,.r dr}{\varpi a^2}\right]^2$$

Sviluppando in serie il radicale $\sqrt{1 + \frac{r}{k}\cos.\varphi}$, effettuando le integrazioni fra i prescritti limiti, ed osservando che $\int_0^{\varpi} \cos.^{\varepsilon}\varphi d\varphi$ è nullo quando ε è un numero dispari, ed eguale a

$$\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

quando ε è pari, si otterrà

$$U = \sqrt{2gk}\left(1 - \frac{1}{32}\,\frac{a^2}{k^2} - \frac{5}{1024}\,\frac{k^4}{a^4}\,. - \text{ec.}\right)$$

$$\text{ed}\qquad H = k\left(1 - \frac{1}{16}\,\frac{a^2}{k^2} - \frac{9}{1024}\,\frac{k^4}{a^4} - \text{ec.}\right)$$

Si ricava per H un valore sotto forma finita quando $h' = 0$, e però $k = a$; ma senza trattenermi ulteriormente nel dimostrarlo, dirò piuttosto che si trova $H = 0{,}922a$, lasciando agli studiosi la cura di dedurlo compiendo l'integrazione.

206. Talvolta l'efflusso non ha luogo in uno spazio libero, Fig. 16 perchè il liquido ristagna ad un altezza costante contro la sezione n dello sbocco. Se ciò accade, chiamando K la distanza AK tra il livello del liquido stagnante kk, e la superficie suprema AA, ed indicando con n' la parte di n che ha per altezza $K - h$, osserveremo che da essa sorte il liquido liberamente con una velocità media che esprimeremo con H', la quale dovrà calcolarsi supponendo $\pi = \pi'$. Ma in quanto alla sezione inferiore sottoposta a ristagno, dettane n'' l'ampiezza, e indicando con χ la distanza di un elemento qualunque di essa dal piano dell'acqua stagnante kk converrà calcolare l'altezza media facendovi $\pi' = \pi + \rho g\chi$. E siccome la distanza ζ dell'elemento che si considera dal livello supremo è $\zeta = K + \chi$, così si otterrà

dalla (I) $U=\sqrt{2gK}$. Ridotto quindi l' efflusso a stato permanente, si avrà la portata q in un tempo t qualunque, espressa dalla formula

$$q=(n'\sqrt{2gH'}+n''\sqrt{2gK})t.$$

207 Se venisse proposto di determinare la pressione in un punto qualunque della massa fluida alla profondità z del livello supremo, siccome i valori di essa (194) involvono la conoscenza della forma dei filamenti percorsi dalla molecula che si considera, così è impossibile di assegnarne in generale, e rigorosamente il valore. Se però suppongasi il moto ridotto a stato permanente, spariranno i termini che contengono gli integrali definiti dipendenti dalla figura dei filamenti medesimi, e si avrà semplicemente

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+gz-\frac{U^2}{2}\left(\frac{dn^2}{d\omega^2}-\frac{dn^2}{dm^2}\right).$$

Quando il rapporto $\frac{dn}{dm}$ è piccolissimo, come già sempre si suppone, e allorchè la sezione $d\omega$ è essa pure comparabile a dm, e quindi grandissima rispetto a dn, avremo

$$p=\pi+\rho gz$$

Se poi la sezione $d\omega$ fosse comparabile a dn, e si potesse supporre, con sufficiente approssimazione, $\frac{dn}{d\omega}=\frac{n}{\omega}$, si otterrebbe

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+gz-\frac{n^2U^2}{\omega^2}=\frac{\pi}{\rho}+gz-\frac{V^2}{2}=\frac{\pi}{\rho}+g(z-k)$$

indicando con k l' altezza ω cui è dovuta la velocità V della molecula presa ad esame.

208. A compimento della teoria degli efflussi laterali, di quelli cioè che hanno luogo per filamenti che sgorgano orizzontalmente da una luce il cui piano è verticale, restano a determinarsi i valori degli sforzi esercitati dal liquido in moto contro le pareti tutte del recipiente. E a tal uopo valendoci delle formule (15) del §. 182, prendendo l' asse delle x parallelo alla direzione orizzontale dell' efflusso, e considerando un unico filamento il cui

peso sia dP, e nel quale il moto sia ridotto a stato permanente, si avrà

$\cos.A' = 1$, $\cos.A = 0$, $\cos.B = 0$, $\cos.B' = 0$, $\cos.C = 1$, $\cos.C' = 0$

onde

$$F\cos.\widehat{fx} = -\rho dnU^2, \quad F\cos\widehat{fy} = 0$$

$$F\cos.\widehat{fz} = dP + \frac{\rho dn^2U^2}{dm}.$$

E quando si possa supporre $\frac{dn}{dm} = \frac{n}{m}$, si otterrà semplicemente

$$F\cos.\widehat{fz} = dP + \rho\frac{n}{m}U^2dn.$$

209. Per determinare poi la totalità degli sforzi sostenuti dal vaso a seconda degli assi, converrà prendere la somma degli sforzi parziali esercitati contro ciascun filamento; e però si otterrà

$$\Sigma.F\cos\widehat{fx} = -\rho\Sigma.U^2dn, \quad \Sigma.F\cos.\widehat{fy} = 0$$

$$\Sigma.F\cos.\widehat{fz} = P + \rho\frac{n}{m}\Sigma.U^2dn$$

in cui il simbolo sommatorio Σ si riferisce a tutti i filamenti, e quindi a tutti gli elementi delle sezioni m ed n Conoscendo la figura della sezione n, ed essendo noti i valori di U, si potrà facilmente calcolare l' espressione $\Sigma.U^2dn$ che è contenuta nelle precedenti formule. Quando però l' orifizio n è alquanto distante dal livello supremo, sarà concesso tenere U costante ed eguale alla velocità media U_1, e però lo sforzo verticale esercitato dall' alto al basso sarà espresso da

$$P + \frac{\rho n^2U_1^2}{m} = P + 2\rho gnH,$$

e quello orizzontale in senso contrario all' effiusso sarà

$$\rho nU_1^2 = 2\rho gnH.$$

210. Se invece si calcolasse la velocità U_1 come dovuta alla distanza ζ tra il centro di figura dell' orifizio, e il livello supremo, (il che può farsi quando l' orifizio è piccolo, e a molta profondità) si potrebbe porre $U_1 = \sqrt{\frac{2g\zeta}{1 - \frac{n^2}{m^2}}}$ e quindi si otterrebbe

$$\text{Sforzo verticale} = P + 2\rho g n\zeta \frac{mn}{m^2 - n^2}$$

$$\text{Sforzo orizzontale} = 2\rho g n\zeta \frac{m^2}{m^2 - n^2}\,.$$

Se l' orifizio n è piccolissimo quest' ultimo sforzo, che ordinariamente suole chiamarsi forza di reazione, riducesi a $2\rho g n\zeta$, cioè al peso di un prisma liquido avente n per base, e per altezza il doppio della distanza del centro dell'orifizio dal livello supremo.

CAPITOLO V.

Del moto di un liquido grave in un recipiente che si vuota.

211. Sgorghi il liquido dal recipiente continuo ad asse verticale descritto nel §. 185, e tenute le denominazioni dell'articolo medesimo, varranno le formule che ivi si sono stabilite dietro l' ipotesi del moto lineare, e soltanto si dovrà in esse considerare la quantità ζ come variabile col tempo.

Eliminando dunque dalla (b) il dt mediante la (13) del §. 178. che somministra

$$(1) \qquad mds = -md\zeta = nUdt,$$

e fatto $h = \frac{U^2}{2g}$, si otterrà la seguente equazione

$$(2) \qquad Qd\zeta + dh + hPd\zeta = 0$$

in cui per brevità si è posto

$$P = -\frac{m\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)}{n^2 \int_0^\zeta \frac{dz}{\omega}}, \qquad Q = \frac{m}{n^2}\,\frac{\zeta + \frac{\pi - \pi'}{\rho g}}{\int_0^\zeta \frac{dz}{\omega}}$$

Moltiplicando la (2) per l'esponenziale $e^{\int Pd\zeta}$ riducesi alla forma

$$Qd\zeta\, e^{\int Pd\zeta} + d.he^{\int Pd\zeta} = 0.$$

Dalla cui integrazione si trae

$$h = e^{-\int Pd\zeta}\left(\text{cost.} - \int Qe^{\int Pd\zeta} d\zeta\right)$$

La costante contenuta in questa equazione deve essere determinata in modo che la U, e in conseguenza la h, siano nulle quando $\zeta = k$, rappresentando con k l'altezza iniziale del liquido al di sopra della sezione infima n.

212. La velocità U dell' efflusso, e l' altezza h a cui è dovuta essendo nulle quando $\zeta = k$ e quando $\zeta = 0$, ne conseguita che per qualche valore intermedio di ζ avranno un valor massimo. Questo si otterrà ponendo $\frac{dh}{d\zeta} = 0$ nella (2) che riducesi a $Ph + Q = 0$, e somministra

$$\zeta = \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)h + \frac{\pi' - \pi}{\rho g}. \tag{4}$$

213. Traendosi dalla (1) la

$$dt = \frac{-m d\zeta}{n\sqrt{2gh}} \tag{5}$$

si potrà da essa dedurre, coll' integrazione, il tempo che impiega il liquido ad abbassarsi dell' altezza $k - \zeta$, cioè

$$t = \frac{1}{n\sqrt{2g}} \int_k^\zeta \frac{-m d\zeta}{\sqrt{h}} \tag{6}$$

e il tempo τ dell' intero vuotamento del recipiente avrà per espressione

$$\tau = \frac{1}{n\sqrt{2g}} \int_k^0 \frac{-m d\zeta}{\sqrt{h}}. \tag{7}$$

214. Il valore di $\frac{d\zeta}{dt}$ tratto dalla (5) serve a determinare la velocità con cui si abbassa la superficie suprema; e l'espressione di $k - \zeta$ che potrebbe dedursi dalla (6) indicherebbe l'abbassamento della superficie medesima in un tempo t.

215. Volendo quindi conoscere la quantità di liquido sgorgata nello stesso tempo t, evidentemente sarebbe somministrata da

$$q = \int_0^t nU dt = -\int_k^\zeta m d\zeta. \tag{8}$$

216. Per calcolare la pressione in una qualsivoglia sezione ω del vaso, valendoci al solito della formula (c) del §. 185, e

proseguendo ad indicare con L ed S gli integrali $\int_0^\zeta \frac{d'z}{\omega}$, ed $\int_{z'}^{z} \frac{d'z}{\omega}$, si avrà

$$p = \pi + \frac{S}{L}(\pi' - \pi) - \frac{S}{L}\rho g\zeta + \rho g(z - z') + \frac{\rho n^2 U^2}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\frac{S}{L} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{m^2}\right). \tag{9}$$

217. A rintracciare finalmente gli sforzi sostenuti dal recipiente in un istante qualunque del moto converrebbe ricorrere alle formule del §. 193., che ci farebbero conoscere che le componenti orizzontali di codesti sforzi sono nulle, e che la componente verticale rappresentata da F ha per valore

$$F = P - \rho n\zeta \frac{dU}{dt} - \rho n^2 U^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \tag{10}$$

nella quale espressione si dovrà porre per ζ, U, ed m quei valori che corrispondono all' istante medesimo, deducendoli dalle formule superiormente stabilite.

218. Per dare un esempio dell'applicazione dell'esposta teoria occupiamoci del moto di un liquido entro un vaso che si mantiene prismatico verticale fino a pochissima distanza dall'ultima sezione, ma che poi si ripiega a guisa di conoide convergentissima, a superficie continua, e dalla cui infima sezione sgorga il liquido in direzione verticale.

Quando dunque si trascuri la saetta della porzione di vaso conoidale in confronto dell' altezza ζ, si potrà considerare m costante, ed $\int_0^\zeta \frac{d'z}{\omega} = \frac{\zeta}{m}$, $\int_{z'}^{z} \frac{d'z}{\omega} = \frac{z - z'}{m}$.

Supponendo ancora per maggior semplicità $\pi = \pi'$, e posto $\frac{m}{n} = \beta$ risulterà

$$P = \frac{1 - \beta^2}{\zeta}, \qquad Q = \beta^2,$$

e perciò la (2) trasformerassi nella

$$\beta^2\zeta d\zeta + \zeta dh + h(1 - \beta^2)d\zeta = 0 \tag{11}$$

e poichè $e^{-\int P d\zeta} = \zeta^{\beta^2 - 1}$, così si avrà

$$h=\zeta^{\beta^2-1}\left(cost.-\beta^2\int\zeta^{1-\beta^2}d\zeta\right)$$

Determinando la costante in guisa che ad $h=0$ corrisponda $\zeta=k$ risulta $cost.=\frac{-\beta^2}{\beta^2-2}k^{2-\beta^2}$, e però

$$(12)\qquad h=\frac{\zeta\beta^2}{\beta^2-2}\left(1-\zeta^{\beta^2-2}k^{2-\beta^2}\right)$$

$$(13)\qquad t=\sqrt{\frac{\beta^2-2}{2g}}\int_k^\zeta\frac{-d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta^{\beta^2-2}k^{2-\beta^2})}}$$

$$(14)\qquad \tau=\sqrt{\frac{\beta^2-2}{2g}}\int_k^0\frac{-d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta^{\beta^2-2}k^{2-\beta^2})}}$$

$$(15)\qquad p=\pi+\rho gh\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{(z-z')}{\zeta}$$

$$=\pi+\rho g(z-z')\frac{\beta^2-1}{\beta^2-2}\left(1-\zeta^{\beta^2-2}k^{2-\beta^2}\right).$$

L' altezza ζ cui corrisponde la massima velocità dell' efflusso sarà

$$\zeta=\frac{\beta^2-1}{\beta^2}h=\zeta\frac{\beta^2-1}{\beta^2-2}\left(1-\zeta^{\beta^2-2}k^{2-\beta^2}\right)$$

dalla quale si trae

$$\zeta=k(\beta^2-1)^{\frac{1}{2-\beta^2}},\quad\text{ed}\quad h=k\beta^2(\beta^2-1)^{\frac{\beta^2-1}{2-\beta^2}}$$

219. Quando la luce n sia piccolissima in confronto di m, ed abbiasi quindi β^2 numero grandissimo, sviluppando questi valori colle note serie relative agli esponenziali si troverà

$$\zeta=k-\frac{k}{\beta^2-1}\log(\beta^2-1),\qquad\text{ed}\qquad h=k\frac{\beta^2}{\beta^2-1}.$$

Dunque la massima velocità dell'efflusso ha luogo quando la superficie suprema si è abbassata del brevissimo tratto

$$\frac{k}{\beta^2-1}\log.(\beta^2-1),$$

e quando ne sarà uscita dalla luce n la quantità

$$\frac{mk}{\beta^2-1}\log.(\beta^2-1),$$

dessa pure piccolissima, perchè il logaritmo di un altissimo numero e incomparabilmente minore del numero stesso. Possiamo dunque in tale ipotesi tener per fermo, che la massima velocità dell'efflusso ha luogo subito dopo i primi istanti del moto, ed è dovuta all' altezza iniziale k.

220. Alcuni integrali della (13) possono ottenersi sotto forma finita quando β^2 è eguale ad 1, a 2 o a 3. Nel primo caso il vaso cilindrico è senza fondo, e però si ha

$$t = \int_k^\zeta \frac{-d\zeta}{\sqrt{2g(\zeta-k)}}$$

da cui si trae

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{k-\zeta}, \quad \text{e} \quad k-\zeta = \frac{1}{2}gt^2$$

le quali espressioni ci rendono manifesto che il moto del fluido è perfettamente simile a quello di un corpo solido grave che cade nel vuoto.

221. Suppongasi $\beta^2=2$ ossia $m=n\sqrt{2}$, e si vedrà che l'espressione dell' altezza h cui è dovuta la velocità dell' efflusso prende la forma di $\frac{0}{0}$; ma determinandone il valore coi noti metodi, si ottiene per h la stessa espressione che si dedurrebbe dalla integrazione della (11) che in tale ipotesi riducesi alla seguente

$$2\zeta d\zeta + \zeta dh - hd\zeta = 0.$$

Moltiplicandola infatti per $-\zeta^2$, rendesi integrabile e somministra

$$2\log.\zeta = \frac{h}{\zeta} + cost.$$

e siccome $cost. = 2\log.k$, così

$$h = 2\zeta\log.\frac{k}{\zeta}$$

$$t = \int_k^\zeta \frac{-d\zeta}{\sqrt{2g\zeta}}\left(\log.\frac{k}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad ,\tau = \frac{1}{\sqrt{1g}}\int_k^0 \frac{-d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\left(\log\frac{k}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

Ponendo $\zeta = he^{-2\Psi^2}$, $d\zeta = -4he^{-2\Psi^2}\Psi d\Psi$
risulta

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2k}{g}}\int_0^{\infty} e^{-\Psi'^2}\, d\Psi = \sqrt{\frac{2\varpi k}{g}}$$

perchè dimostrasi nella teoria degli integrali definiti, che essendo ϖ il rapporto della circonferenza al diametro, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Psi^2}\, d\Psi = \sqrt{\varpi}$$

Dunque il tempo del vuotamento del vaso è quello stesso che impiegherebbe un pendolo semplice di lunghezza $\frac{2k}{\varpi}$ a compiere una piccola oscillazione.

La pressione contro una sezione ω alla profondità $z - z'$ del livello supremo eguaglierebbe

$$p = \pi + \rho g \log.\frac{k}{\zeta}(z - z')$$

222. Pongasi finalmente $\beta^2 = 3$, e si otterrà

$$h = 3\zeta\left(1 - \frac{\zeta}{k}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{k}{2g}}\int_k^{\zeta}\frac{-d\zeta}{\sqrt{k\zeta - \zeta^2}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{2g}}\cdot\varpi$$

Si vuoterebbe quindi il vaso nel tempo stesso in cui un pendolo semplice di lunghezza $\frac{k}{2}$ eseguirebbe una intera oscillazione.

223. Ma il caso più ordinario è quello in cui $\frac{m^2}{n^2}$ è un numero grandissimo rispetto all' unità; ed allora $\frac{\zeta}{k}$ essendo una frazione, $\zeta^{\beta^2 - 2}\, k^{2 - \beta^2} = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{\beta^2 - 2}$ sarà un numero piccolissimo, e perciò prossimamente si avrà

$$h = \zeta, \quad U = \sqrt{2g\zeta}$$

(16) $$t = \frac{m}{n\sqrt{g}}\int_k^{\zeta}\frac{-d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{2m}{n}\,\frac{\sqrt{k} - \sqrt{\zeta}}{\sqrt{2g}}$$

(17) $$\tau = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2k}{g}}$$

Dalla (16) e dalla (8) si traggono

$$k-\zeta=\frac{tn}{m}\sqrt{2gk}-\frac{n^2}{m^2}\frac{gt^2}{2} \tag{18}$$

$$q=-m\int_k^\zeta d\zeta=m(k-\zeta). \tag{19}$$

La (18) ci dimostra che la discesa della superficie suprema, è uniformemente ritardata. Infatti confrontando questa formula con quella del §. 237. della Meccanica, si vedrà, che essendo $k-\zeta$ lo spazio percorso, $\frac{n}{m}\sqrt{2gk}$ è la velocità iniziale, ed $\frac{n^2}{m^2}g$ la forza ritardatrice.

Per la proprietà di questo moto, il tempo τ del vuotamento del vaso deve essere doppio di quello che impiegherebbe il vaso stesso a vuotarsi se l' efflusso fosse dovuto alla velocità costante iniziale. Il che è facile a verificarsi; poichè chiamando τ' questo ultimo tempo, siccome deve eguagliare lo spazio percorso diviso per la velocità, si avrà

$$\tau'=\frac{k}{\frac{n}{m}\sqrt{2gk}}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{k}{2g}}=\frac{\tau}{2}.$$

221. Rendesi ancora semplicissima la soluzione del problema, quando si considerino dei recipienti continui di qualunque forma purchè abbiano l' infima sezione orizzontale piccolissima. Ed invero nella equazione (2) moltiplicata per il denominatore $n^2\int_0^\zeta\frac{d'z}{\omega}$, che è quantità piccolissima di second' ordine, spariranno i termini che lo hanno per fattore, e trascurando $\frac{n^2}{m^2}$ in faccia all' unità rimarrà

$$\zeta+\frac{\pi-\pi'}{\rho g}=h;\ \text{da cui}\quad U=\sqrt{2g\left(\zeta+\frac{\pi-\pi'}{\rho g}\right)};$$

e se $\pi=\pi'$, $\qquad U=\sqrt{2g\zeta}.$

$$t=\frac{1}{n\sqrt{2g}}\int_k^\zeta\frac{-md\zeta}{\sqrt{\zeta}},\quad q=\int_k^\zeta -md\zeta,$$

e finalmente

$$p = \pi + \rho g(z - z')$$

come se l' acqua fosse stagnante.

225. Suppongasi il vaso generato da una curva piana che si aggiri intorno ad un asse verticale; e le ordinate orizzontali di questa curva, che rotando generano le sezioni trasversali del vaso, si rappresentino con r. Se n è piccolissima, la velocità con cui scende la superficie suprema del liquido sarà per le cose anzidette eguale ad

$$\frac{n}{m} U = \frac{n}{m} \sqrt{2g\zeta}.$$

E se si vuole che una tale quantità eguagli una costante data D, cioè che la discesa sia equabile (condizione che sarebbe necessaria, nella costruzione di una *clepsidra* ad acqua), si porrà $\frac{nU}{m} = D$. Siccome poi la sezione circolare m, che ha per raggio r, eguaglia ϖr^2, così si avrà

$$\frac{n\sqrt{2g\zeta}}{\varpi r^2} = D$$

da cui

$$r^4 = \frac{2gn^2}{\varpi^2 D^2} \zeta$$

equazione di una parabola di quarto grado di cui r e ζ sono le coordinate correnti.

226. Per ragioni analoghe a quelle esposte nel §. 194. si potranno ancora facilmente applicare le formule fin quì dedotte al moto di un liquido per un minimo tubo curvilineo le cui sezioni estreme dm e dn siano separate dalla distanza verticale variabile ζ. Infatti si avra per esso

$$(20) \qquad \frac{\pi' - \pi}{\rho} = g\zeta - n \frac{dU}{dt} \int_s^{s'} \frac{d'\sigma}{\omega} - \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - \frac{dn^2}{dm^2}\right)$$

la quale si dovrà combinare colla seguente

$$mds = -\frac{md\zeta}{\text{co}.C} = nUdt$$

che deducesi dalla $ds = \frac{-d\zeta}{\cos.C}$, in cui C rappresenta l' angolo variabile che l' asse del filamento forma colla verticale nel punto corrispondente alla sezione suprema dm; e questo coseno sarà una funzione data di ζ, cognita che sia la figura del filamento medesimo. Non sarà quindi difficile l'ottenere in generale, dei risultati analoghi a quelli superiormente scritti relativamente alla celerità dell'efflusso per la luce dn, e alla pressione per una sezione $d\omega$ qualunque.

Allorchè poi per la piccolezza di dn in confronto di dm sia trascurabile il termine $\rho dn \frac{dU}{dt} \int_s^{s'} \frac{d'\sigma}{\omega}$, la (17.) ci somministrerà immediatamente

$$(21) \qquad U = \sqrt{2g\left(\zeta + \frac{\pi \quad \pi'}{\rho g}\right)}\;.$$

E la pressione per una sezione $d\omega$ alla profondità $z - z'$ dal livello supremo diverrà quì pure

$$(22) \qquad p = \pi + \rho g(z - z').$$

227. Quando infine si voglia considerare un vaso che si vuota per una luce infima n, a piano verticale, o inclinato, e precisamente come fu descritto al §. 195, per determinarne le leggi dell'efflusso in tutta la generalità, converrebbe conoscere la natura de' filamenti che hanno origine alla sezione suprema, e sbocco all'infima, i quali filamenti sono variabili col tempo di posizione e figura.

Ma una tale cognizione non può aversi perchè è implicita nella completa soluzione del problema medesimo. Qualunque però sia la figura ignota di essi, finchè la luce n si mantiene assai piccola in confronto di m, il rapporto $\frac{dn}{dm}$ potrà riputarsi piccolissimo, e quindi la velocità U dell'efflusso per la luce dn sarà data dalla (21.). Non resterà dunque che a calcolarsi l'altezza media H cui è dovuta la velocità media U_1 dell'efflusso, e ciò si farà mediante le formule del §. 197. e seguenti.

Fig. 14 228. Se ben si osserva, qualunque sia la figura della sezione infima, a calcolo compito la H e quindi la U_1 risultano funzioni di h ed h'; ma se f è l'altezza verticale della luce avremo $h' + f = h$, e però si potrà considerare H come funzione di h ed f.

Finchè h' è una quantità positiva f rimane costante, e all'abbassarsi del fluido nel vaso, h diminuisce: e nel tempo dt la quantità di liquido sgorgata dalla luce n sarà $nU_1dt = -mdh$; dalla integrazione della quale, per essere U_1 ed m funzioni della sola h, ritrovasi $h = F(t)$. La portata poi in un tempo t sarà data dalla formula

$$q = \int_0^t nU_1dt = -\int_0^t m\frac{dh}{dt}dt.$$

229. Se il livello del liquido si abbassa anche al di sotto del punto supremo della luce n, allora l' ampiezza della porzione di essa per cui sgorga il liquido diverrebbe variabile, imperocchè la sua altezza f eguaglierebbe l' altezza h del liquido che va gradatamente scemando.

Se l' acqua ristagnasse ad un altezza costante contro una parte n'' della luce n, l' acqua sgorgherebbe liberamente dalla porzione superiore n', e valendoci delle formule del § 200, dovremmo tenere U_1 quale velocità media variabile di questa porzione di luce n', la quale porzione sarà di ampiezza costante finchè il livello del liquido nel recipiente rimarrà ad essa superiore, e varierà col tempo quando un tal livello si abbassa al di sotto della di lei sommità.

Quando applicheremo in un altro volume queste formule agli efflussi dell'acqua per gli emissarii, meglio che ora se ne potrà riconoscere l' utilità ed il mezzo di usarne.

CAPITOLO VI.

Dell' equilibrio e del moto de' liquidi ne' vasi mobili.

230. Abbiamo fino ad ora considerato il movimento dei liquidi entro recipienti fissi; ma talvolta occorre di determinarne le leggi quando anche questi recipienti sieno mobili nello spazio. A trattare convenientemente un tale argomento giova distinguere due casi.

1.° O il moto del vaso è cognito, ed il liquido partecipa soltanto del moto medesimo rimanendo in quiete rispetto al recipiente.

2.° O il liquido, oltre al movimento che ha comune col vaso, gode ancora di un particolare moto rispetto al recipiente medesimo.

In ambedue le ipotesi però, le formule generali dell' Idrodinamica ritrovate al Capitolo primo, sono applicabili tanto per stabilire le equazioni delle forze sollecitanti e della continuità, quanto per determinare le pressioni e le superficie di livello. Basterà soltanto alla velocità V di una molecula qualunque del liquido, sostituire la risultante della velocità che la molecula stessa ha comune col recipiente, e di quella onde è animata relativamente al vaso medesimo.

231. Abbiasi un vaso di qualsiasi forma che contenga del liquido in quiete animato dalla forza acceleratrice F.

Si imprima al sistema una velocità comune Λ, funzione del tempo, parallelamente ad una retta determinata.

Nelle formule (A') del §. 145. dovrà porsi in luogo di ∂V, $\frac{d\Lambda}{dt}dt$, perchè $\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)=0$, e di più conviene supporvi $r=\infty$, essendo rette le linee percorse da tutte le molecule. Si avrà quindi

$$\frac{d'p}{\rho}=Fd'f-\frac{d\Lambda}{dt}d's$$

e da questa espressione si potrà dedurre il valore della pressione, e l' equazione della superficie di livello.

Se il liquido è animato soltanto dalla gravità, ed il vaso è mosso verticalmente sarà

$$F=g,\ d'f=d'z,\ d's=\pm d'z, \qquad \text{e quindi}$$

$$\frac{d'p}{\rho}=\left(g\mp\frac{d\Lambda}{dt}\right)d'z$$

e varrà il segno superiore quando il vaso si muove dall' alto in basso, l' inferiore quando è tirato dal basso in alto.

Effettuando l' integrazione, e supponendo che ove $z=z'$ sia $p=\pi$, si otterrà

$$p=\pi+\rho\left(g\mp\frac{d\Lambda}{dt}\right)(z-z')$$

Le superficie di livello corrispondono poi a $d'p=0$; cioè a $d'z=0$, equazione che appartiene a tanti piani orizzontali.

232. Se il vaso è mosso orizzontalmente nel senso delle y avremo

$$\frac{1}{\rho}d'p = g d'z - \frac{d\Lambda}{dt} d'y$$

da cui, integrando in guisa che a $z = z'$, e ad $y = y'$ corrisponda $p = \pi$, si deduce

$$p = \pi + g(z - z') - \frac{d\Lambda}{dt}(y - y').$$

Le equazioni poi delle superficie di livello per cui $d'p = 0$, sarebbero contenute nella

$$gz - \frac{d\Lambda}{dt} y = cost.$$

la quale rappresenta dei piani normali al piano zy, ed inclinati all' orizzontale Oy di un angolo, la cui tangente trigonometrica è $\frac{g dt}{d\Lambda}$.

233. Muovasi uniformemente intorno al proprio asse verticale un vaso cilindrico ripieno di liquido in quiete relativa, ed animato da forze acceleratrici quali si vogliano. Se ε è la velocità costante di rotazione, nella citata formula (A') converrà porre $V = \varepsilon r$, indicando con r la distanza della molecula che si considera dall'asse; e il differenziale di esso sarà di segno contrario a quello contenuto nella formula stessa, ove gli aumenti del raggio di osculo si computano dalla circonferenza al centro. E facendo ancora $\frac{\delta V}{dt} = 0$, perchè il moto è uniforme, sarà

$$\frac{1}{\rho} d'p = F d'f + \varepsilon^2 r d'r,$$

e

$$\frac{p}{\rho} = cost. + \int F d'f + \frac{\varepsilon^2 r^2}{2}.$$

Se poi agisce la sola gravità, e si integra in guisa che corrisponda $p = \pi$ a $z = 0$ ed $r = 0$, avremo

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + gz - \frac{\varepsilon^2 r^2}{2}.$$

La superficie libera sarà cognita in virtù della $d'p = 0$ ossia della $p = \pi$; e però l' equazione che la rappresenta è

$$-z = \frac{\varepsilon^2 r^2}{2g}$$

che appartiene ad una parabola.

Sarà quindi la superficie del liquido una superficie di rivoluzione, generata da una parabola che ruota intorno all' asse verticale, e la cui concavità è volta in alto.

234. Supponiamo finalmente che il vaso simmetrico intorno all' asse verticale sia sollevato colla velocità variabile Λ mediante un peso di massa M attaccato ad una funicella che si avvolge ad una puleggia fissa, mentre sgorga il liquido dalla luce n con velocità U da determinarsi.

Poichè $\frac{d\Lambda}{dt}$ è la forza acceleratrice corrispondente all' aumento comune di velocità $d\Lambda$, che ha luogo nel tempo dt per tutti i punti del sistema; così immaginandoli animati da una forza acceleratrice $\frac{d\Lambda}{dt}$, nel senso della gravità che è opposto a quello del moto, rimarrà il vaso in equilibrio, e sgorgherà il liquido colla velocità relativa U dalla luce n.

Facendo quindi per maggior semplicità $\pi = \pi'$, la formula (11.) del §. 178. diverrà

$$(a) \qquad 0 = \rho\left(g + \frac{d\Lambda}{dt}\right)\zeta - \rho n \frac{dU}{dt}\int_0^\zeta \frac{d'z}{\omega} - \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right).$$

Chiamando poi R la massa del recipiente vuoto ed N quella del recipiente stesso unitamente al liquido che contiene alla fine del tempo t, si avrà

$$N = R + \rho\int_0^\zeta \omega d'z$$

e pel principio di d' Alembert

$$(M - N)g = (M + N)\frac{d\Lambda}{dt}$$

da cui

$$(b) \qquad \frac{d\Lambda}{dt} = g\frac{M - N}{M + N}$$

questa, unitamente alla (a), ed alla

$$(c) \qquad -m d\zeta = n U dt$$

servirà a determinare ζ, U e Λ in funzione di t; con che si ottiene la completa soluzione del problema.

Se il vaso fosse mantenuto costantemente pieno e si supponesse l' efflusso ridotto a stato permanente per un piccolo orifizio, sarebbe $\frac{dU}{dt}=0$, e quindi

$$U=\sqrt{2g\zeta\cdot\frac{2M}{M+N}}$$

Se $M=0$ il liquido non esce dal vaso; se $M=N$ il liquido sorte dal vaso immobile con velocità $U=\sqrt{2g\zeta}$; e se M è grandissimo $U=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2g\zeta}$.

CAPITOLO VII.

Dell' affusione dell' acqua ne' vasi.

235. Tenuta ferma l' ipotesi del moto lineare, che si addice anche al moto di un liquido per un filamento infinitesimo, immaginiamo che alla sezione suprema m affluisca continuamente nuovo liquido con velocità uniforme, o variabile col tempo. Sia $\rho M\Gamma dt$ la quantità di liquido affluita nel tempo dt colla velocità Γ. Siccome questa massa fluida deve ridursi alla velocità W della sezione suprema m, così è mestieri che nel tempo dt perda la velocità $\Gamma - W$. La forza motrice capace di togliere una tal velocità alla massa $\rho M\Gamma dt$, cioè la

$$\rho\Gamma\frac{(\Gamma-W)}{dt}Mdt=\rho M(\Gamma-W)\Gamma,$$

sarà ancora la misura dell' urto che ne riceve la superficie suprema.

Supponendo che quest' urto si distribuisca uniformemente, e normalmente, sulla sezione m, e che in conseguenza si faccia astrazione dai moti vorticosi e laterali che può imprimere al liquido sottostante, la sezione medesima potrà considerarsi gravata in tutta la sua estensione da una pressione addizionale, il cui valore riferito all' unità superficiale sarebbe

$$\frac{\rho\Gamma(\Gamma-W)M}{m}$$

la quale pressione concorre ad accelerare il moto del liquido nel recipiente.

Ponendo dunque nelle formule (9) e (11) del §. 178 in luogo di π, $\pi+\frac{\rho\Gamma-W)M\Gamma}{m}=\pi+\rho\left(\Gamma-\frac{nU}{m}\right)\frac{M\Gamma}{m}$; si avrebbe

$$(A)\ \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'}Td'\sigma-\frac{W'^2}{2}+\frac{W^2}{2}-\int_s^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma+\Gamma(\Gamma-W)\frac{M}{m}$$

$$(A')\ \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'}Td'\sigma-\frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)-n\frac{dU}{dt}\int_s^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega}+\left(\Gamma-\frac{n}{m}U\right)\frac{M\Gamma}{m}$$

Siccome poi la variazione del livello supremo deve calcolarsi dalla differenza tra l' acqua affluita, e quella sgorgata dalla sezione n, che si suppone l' infima del liquido e del vaso, si avrebbe

$$(B)\qquad -mds=\Gamma Mdt-Undt.$$

Mediante questa e la (A') che contengono soltanto di incognite la s, la U e la t, si potrebbe, effettuata l' integrazione, determinare U, ed s in funzione di t; con che si verrebbe a conoscere la velocità dell' efflusso, e la quantità d' acqua esistente nel recipiente alla fine di un tempo qualunque.

236. Rinunciando però alla ricerca della soluzione generale del problema, osserveremo soltanto, che allorquando si tratta di liquidi gravi, e che la porzione affluente è dotata di una velocità costante, e quella effluente sorte per un piccolissimo foro, trascurando nella (A') tutti i termini moltiplicati per n, posto $\int_s^{s'}Td'\sigma=g\zeta$ e fatto per semplicità $\pi'=\pi$, ed $h=\frac{M}{m}\frac{\Gamma^2}{2g}$ si riduce alla seguente

$$(C)\qquad U^2=2g\zeta+\frac{M\Gamma^2}{m}=2g(\zeta+h).$$

Dalla (B) poi si trae, osservando che $ds=-d\zeta$

$$dt=\frac{-md\zeta}{Un-\Gamma M}=\frac{m}{n}\frac{d\zeta}{\frac{\Gamma M}{n}-U}$$

ossia
$$dt=\frac{m}{n\sqrt{2g}}\,\frac{d\zeta}{\frac{\sqrt{mMh}}{n}-\sqrt{\zeta+h}}$$

Fatto $\frac{m}{n\sqrt{2g}}=a$ e $\frac{\sqrt{mMh}}{n}=\sqrt{b}$, indicando con l l' altezza iniziale, si avrà

$$t=a\int_l^\zeta\frac{d\zeta}{\sqrt{b}-\sqrt{\zeta+h}}$$

e quindi

$$t=2a\left(\sqrt{l+h}-\sqrt{\zeta+h}+\sqrt{b}\log.\frac{\sqrt{b}-\sqrt{l+h}}{\sqrt{b}-\sqrt{\zeta+h}}\right)$$

Perchè l' efflusso si facesse permanente, converrebbe che fosse $Un=\Gamma M$, ossia $\sqrt{b}=\sqrt{\zeta+h}$, e in tale ipotesi t diventa infinito. La qual cosa ci rende palese, che a tutto rigore, l' efflusso perenne ed uniforme, e l' immobilità della superficie suprema, non possono giammai conseguirsi; quantunque, ammesse certe proporzioni tra la luce e le altre sezioni del vaso, possa talvolta considerarsi l' efflusso e la posizione della superficie suprema, come stabiliti invariabilmente dopo non lungo intervallo di tempo.

237. Se il liquido affluisce lateralmente nel vaso, in guisa tale che la velocità estinta non siasi esercitata in parte alcuna a premere normalmente la sezione m, nell' equazione (A') sarà nullo il termine $\left(\Gamma-\frac{n}{m}U\right)\frac{M\Gamma}{m}$. E trattandosi di liquidi gravi, e di efflusso da piccolo foro, come nel paragrafo antecedente si avrà

$$U=\sqrt{2g\zeta},\quad \text{e}\ dt=\frac{-m d\zeta}{Un-M\Gamma}.$$

Dalle quali, tenute ferme le denominazioni stabilite, si otterrebbe

$$t=\frac{2m}{n\sqrt{2g}}\left(\sqrt{l}-\sqrt{\zeta}+\sqrt{b}\log.\frac{\sqrt{b}-\sqrt{l}}{\sqrt{b}-\sqrt{\zeta}}\right).$$

E però ci sarebbe concesso di dedurne analoghe conclusion relativamente all' efflusso uniforme.

238. Veniamo ora ad occuparci del caso più frequente in cui l' affusione del liquido normalmente alla superficie suprema è regolata in guisa che rimane invariata la situazione della superficie medesima. Egli è evidente che dovrà perciò, il liquido affluente pareggiare l' effluente avendosi $mW = M\Gamma$; laonde la pressione addizionale diventa $\rho W(\Gamma - W)$, e l' equazione (A) potrà scriversi così

$$(D) \quad \frac{\pi' - \pi}{\rho} - \frac{\Gamma^2}{2} = \int_s^{s'} T d'\sigma - \frac{W'^2}{2} - \frac{(\Gamma - W)^2}{2} - \int_s^{s'} \left(\frac{dV}{dt}\right) d'\sigma$$

Moltiplicando convenientemente questa equazione per le quantità costanti $\omega ds = m ds = m' ds' =$ ec. si può enunciare a forma del principio delle forze vive nel modo seguente.

« I momenti virtuali delle pressioni estreme, più i momenti virtuali delle forze motrici che animano la massa liquida alla fine del tempo t, più la metà della forza viva dello strato che subentra al supremo nel tempo dt, eguagliano la metà della variazione di forza viva avvenuta nel tempuscolo medesimo, a tutta la massa liquida, comprendendovi in conseguenza le variazioni relative ai limiti, cioè $\rho m ds \frac{(\Gamma - W)^2}{2}$, e $\frac{\rho m' W'^2 ds'}{2}$. »

Se finalmente si volesse conoscere la pressione in una sezione ω qualsivoglia corrispondente ad un arco σ di direttrice, facile sarebbe dedurla dalla (8) del §. (178), che in virtù della pressione addizionale diventa

$$(E) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + \frac{\Gamma^2}{2} + \int_s^{\sigma} T d'\sigma - \frac{V^2}{2} - \frac{(\Gamma - W)^2}{2} - \int_s^{\sigma} \left(\frac{dV}{dt}\right) d'\sigma.$$

CAPITOLO VIII.

Del moto de' liquidi per i vasi discontinui.

239. Abbiamo convenuto di chiamare continui que' recipienti in cui le sezioni trasversali variano seguendo la legge di continuità, cioè quei vasi o que' filamenti per cui il limite del rapporto fra due sezioni successive quali si vogliano, è l' unità. Se dunque in alcune situazioni di codesti vasi o filamenti, il sud-

detto rapporto è diverso dall' unità, ivi diremo aver luogo una discontinuità, e però formeranno un recipiente discontinuo.

210. Abbiasi a cagion d' esempio un recipiente composto di parecchi vasi continui e il liquido scorra entro i medesimi seguendo la direttrice ss_1s_2s'. Chiamisi m la superficie del liquido nel primo vaso che può variare se esso si vuota; ed m_1, m_2....ec. le respettive sezioni supreme dei vasi inferiori, ed n_1, n_2.... n le sezioni infime di quello e di questi. Fig. 17

Siano U_1, U_2, ... U le velocità dell'efflusso nelle sezioni n_1, n_2,.... n ove hanno luogo le pressioni π_1, π_2, ... π', incognite le prime, e l' ultima nota. Si rappresenti, al solito con π, p, p_1, p_2.... le pressioni alle sezioni m, ω, ω_1, ω_2....

Poichè il liquido sgorga dalle luci n_1 ed n_2 con velocità U_1 ed U_2 diverse dalle velocità W_1, W_2 delle sezioni respettivamente contigue m_1 ed m_2, così converrà immaginare alle pressioni π_1 e π_2 aggiunte delle pressioni corrispondenti alle velocità estinte $U_1 - W_1$, $U_2 - W_2$ per ottenere le vere pressioni che si esercitano sulle sezioni m_1 ed m_2; e però, applicando la equazione (D) del capitolo antecedente a tre soli vasi di cui supporremo composto il recipiente discontinuo, avremo

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\pi_1-\pi}{\rho}=\int_s^{s_1}Td'\sigma-\int_s^{s_1}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma-\frac{U_1}{2}+\frac{W^2}{2}\\&\frac{\pi_2-\pi_1}{\rho}-\frac{U_1^2}{2}=\int_{s_1}^{s_2}Td'\sigma-\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma-\frac{U_2^2}{2}-\frac{(U_1-W_1)^2}{2}\\&\frac{\pi'-\pi_2}{\rho}-\frac{U_2^2}{2}=\int_{s_2}^{s'}Td'\sigma-\int_{s_2}^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma-\frac{U^2}{2}-\frac{(U_2-W_2)^2}{2}\end{aligned}\right.$$

le quali sommate assieme somministrano la seguente

$$(\beta)\quad\frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'}T'd'\sigma-\int_s^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma+\frac{W^2}{2}-\frac{U_2}{2}-\frac{(U_1-W_1)^2}{2}-\frac{(U_2-W_2)^2}{2}.$$

E se il recipiente discontinuo fosse composto di un maggior numero di tronchi si avrebbe in generale

$$(\gamma)\quad\frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'}T'd'\sigma-\int_s^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma+\frac{W^2}{2}-\frac{U^2}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_s^{s'}(U_1-W_1)^2$$

riferendosi il simbolo sommatorio $\Sigma_s^{s'}$ a tutti i termini dipendenti dalle discontinuità del recipiente composto.

241. Questa ultima equazione potrebbe moltiplicarsi per la quantità costante $\rho\omega d\sigma$, che è la massa liquida che passa nel tempo dt per ciascuna sezione, e così sarebbe facile enunciarla a norma del principio delle forze vive; imperocchè ci renderebbe manifesto, che i momenti virtuali delle pressioni superficiali, più i momenti virtuali delle forze motrici la massa liquida, eguagliano la semisomma della forza viva acquistata o perduta nel tempuscolo dt della massa medesima.

212. La pressione nel primo vaso calcolasi colla formula (8) del § 178.; ma quella che si riferisce alle sezioni ω_1 ω_2... degli intermedj deve determinarsi mediante la (E) dell'antecedente capitolo, in cui per la pressione superficiale π converrà porre i valori di π_1 e π_2 dedotti dalle (α).

Così per esempio nel terzo vaso, per la sezione ω_2 si avrebbe

$$\frac{p_2-\pi_2}{\rho}-\frac{U_2{}^2}{2}=\int_s^{\sigma_2}Td'\sigma-\frac{V_2{}^2}{2}-\frac{(U_2-W_2)^2}{2}-\int_s^{\sigma_2}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

che sommata colle due prime delle (α) per eliminarne il π_2 darà per p_2 il seguente valore

$$(\delta)\quad \frac{p_2}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+\int_s^{\sigma_2}Td'\sigma-\frac{V_2{}^2}{2}+\frac{W^2}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_s^{\sigma_2}(U_1-W_1)^2-\int_s^{\sigma_2}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma$$

e che sottratto dalla (γ) somministra ancora

$$(\delta')\quad \frac{p^2}{\rho}-\frac{\pi'}{\rho}=\int_{\sigma_2}^{s'}Td'\sigma+\int_{\sigma_2}^{s'}\left(\frac{dV}{dt}\right)d'\sigma+\frac{1}{2}\Sigma_{\sigma_2}^{s'}(U_1-V_1)^2-\frac{V_2{}^2}{2}+\frac{U^2}{2}$$

213. Nell' ipotesi adottata del moto lineare per vasi di larghezza finita, o per filamenti infinitesimi, avendosi le equazioni

$$nU=mW=n_1U_1=m_1W_1=\text{ec.}$$

la (γ) diverrà

$$(\varepsilon)\quad \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'}Td'\sigma-\frac{ndU}{dt}\int_s^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega}-\frac{U^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)-\frac{n^2U^2}{2}\Sigma\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m_1}\right)^2$$

Dalla quale generalmente ottenere si potranno dei risultamenti analoghi a quelli dedotti dalla (b) del §. 185., poichè è della stessa forma.

La pressione p_i in una sezione qualunque ω_i di un vaso $(i+1)$esimo sarà quindi espressa da

$$(\varepsilon)\quad \frac{p_i}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + \int_s^{\sigma_i} Td'\sigma - \frac{ndU}{dt}\int_s^{\sigma_i}\frac{d'\sigma}{\omega} - \frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_i^2} - \frac{1}{m^2}\right) - \frac{n^2U^2}{2}\,\Sigma_s^{\sigma_i}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)^2$$

$$= \frac{\pi'}{\rho} - \int_{\sigma_i}^{s'} Td'\sigma + \frac{ndU}{dt}\int_{\sigma_i}^{s'}\frac{d'\sigma}{\omega} - \frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_i^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{nU^2}{2}\,\Sigma_{\sigma_i}^{s'}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)^2.$$

244. Ciò che maggiormente interessa in simil genere di ricerche, supposto il vaso primo mantenuto costantemente pieno, si è di assegnare la velocità dell' efflusso ridotto a stato permanente; e facilmente si raggiungerà questo scopo facendo nella (ε) $\frac{dU}{dt} = 0$; dalla quale ipotesi risulta

$$(\psi)\qquad U = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi - \pi'}{\rho} + \int Td'\sigma\right)}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} + \Sigma\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)^2}}\,.$$

Se le luci $n, n_1, n_2 \ldots$ sono piccole in confronto di $m, m_1, m_2 \ldots$ avremo prossimamente

$$(\psi')\qquad U = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi - \pi'}{\rho} + \int Td'\sigma\right)}{1 + n^2\Sigma\frac{1}{n_1^2}}}\,.$$

E se di più la luce n dell' ultimo vaso è piccolissima rispetto alle altre n_1 $n_2 \ldots$ si otterrà semplicemente come se non vi fossero discontinuità

$$(\psi'')\qquad U = \sqrt{.2\left(\frac{\pi - \pi'}{\rho} + \int Td'\sigma\right)}\,.$$

La formula (ψ') quando $\pi = \pi'$, e $\int_s^{s'} Td'\sigma = g\zeta$, e allorchè si prenda ad esame un vaso con una sola discontinuità riducesi alla

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta}{1 + \frac{n^2}{n_1^2}}}\,.$$

245. Se il recipiente si vuota questo sarà il valore della velocità dell'efflusso finchè il livello supremo rimane nel tronco superiore, cioè per quanto poco il fluido sia elevato al di sopra della discontinuità. Ma tosto che il liquido sarà sceso al di sotto della medesima, la velocità dell' efflusso sarà data dalla formula

$$U=\sqrt{2g\zeta}.$$

Ora quest' ultimo valore di ζ può essere pochissimo inferiore allo ζ della formula precedente, e quindi il valore di U ricavato dalla medesima può riuscire di gran lunga inferiore alla velocità dedotta dall' ultima.

Con ciò si dà plausibile ragione di un fenomeno osservato da Mariotte, il quale esperimentando l' efflusso da un vaso avente un diaframma, vide la velocità dell' efflusso rendersi istantaneamente maggiore, dal momento che il liquido, al continuo abbassarsi del supremo livello, si stabiliva tutto al di sotto della discontinuità prodotta dall' interposto diaframma.

246. A complemento della soluzione del propostoci problema non restaci ora che a determinare gli sforzi che sostiene il recipiente discontinuo a seconda dei tre assi quando il moto è ridotto permanente; e perciò osservando che la somma delle componenti rettangole degli sforzi parziali esercitati contro ciascun tronco formano le componenti ortogonali dello sforzo totale, avremo

$$F\cos.\widehat{fx}=\int_s^{s'}Xd\mu-\rho n^2U^2\Sigma.\left(\frac{\cos.A_1}{n_1}-\frac{\cos.A}{m}\right)$$

$$F\cos.\widehat{fy}=\int_s^{s'}Yd\mu-\rho n^2U^2\Sigma.\left(\frac{\cos B_1}{n_1}-\frac{\cos.B}{m}\right)$$

$$F\cos.\widehat{fz}=\int_s^{s'}Zd\mu-\rho n^2U^2\Sigma.\left(\frac{\cos.C_1}{n_1}-\frac{\cos.C}{m}\right).$$

E se si tratta di fluidi gravi, e la direttrice è verticale, ponendo $\int_s^{s'}gd\mu=P$ si avrà

$$F\cos.\widehat{fx}=0,\qquad F\cos.\widehat{fy}=0$$

$$F\cos.\widehat{fz}=P-\rho n^2U^2\Sigma_s^{s'}\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m}\right)=$$

$$P-2\rho g\left(\zeta+\frac{\pi-\pi'}{g\rho}\right)\frac{\Sigma_s^{s'}\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{m^2}+\Sigma\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m_1}\right)^2}$$

nella quale formula il simbolo Σ si estende alle sole discontinuità, ed il simbolo $\Sigma_s^{s'}$, a tutti i vasi componenti il sistema discontinuo.

CAPITOLO IX.

Dei vasi comunicanti.

247. La teoria del moto de' liquidi per i vasi comunicanti, è fondata su quella già stabilita nel capitolo antecedente relativamente ai recipienti discontinui. Le formule quindi in esso registrate saranno applicabili alla soluzione dei differenti problemi che ora ci andremo proponendo.

Vogliasi, a cagion d'esempio, determinare la pressione, e la velocità nelle varie sezioni di due vasi continui mmn_1n_1 ed $MMnn$ uno immerso nell'altro, simmetrici intorno ad un asse verticale, e ne' quali il liquido si muove in guisa che dal primo passa nel secondo attraversando l'orifizio n_1n_1, ove si suppone che le molecule abbiano una direzione parallela all'asse. Pongansi a tal uopo le seguenti denominazioni: Fig. 18

m ed n_1. Sezioni prima ed ultima del primo vaso.

m_1. Prima sezione anulare del secondo vaso contigua ad n_1.

n. Sezione ultima parimente anulare del vaso medesimo.

U_1. Velocità in n_1.

p e p_1. Pressioni nelle sezioni ω ed ω_1 prese respettivamente nel primo, e secondo recipiente.

ζ e ζ'. Distanze fra le sezioni m ed n_1, e fra le sezioni m_1 ed n.

z e z_1. Profondità delle sezioni ω ed ω_1 dai respettivi supremi livelli del liquido, nei vasi a cui appartengono.

Se si tratta di liquidi gravi l'equazione (ε) si trasformerà nella seguente, avvertendo che nel secondo tronco la direzione del moto è inversa agli aumenti della direttrice.

$$(A)\qquad \frac{\pi'-\pi}{\rho}=g(\zeta-\zeta')-\frac{n_1dU_1}{dt}\int_0^\zeta\frac{d'z}{\omega}-$$

$$\frac{n_1dU_1}{dt}\int_0^{\zeta'}\frac{d's}{\omega}-\frac{n_1{}^2U_1{}^2}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)-\frac{n_1{}^2U_1{}^2}{2}\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{m_1}\right)^2.$$

A questa poi si dovranno aggiungere le due

$$(B)\qquad n\,d\zeta' + m\,d\zeta = 0, \quad \text{e} \quad -m\,d\zeta = n_1 U_1 dt$$

che si deducono dalla condizione che la massa totale del liquido rimanga invariata nel tempo del movimento, e mediante queste tre riunite si dovrebbero assegnare i valori di U_1 di ζ e ζ' in funzione di t.

Si potrebbero finalmente determinare le pressioni p e p_1 modificando a dovere le formule (δ), e (δ') del §. 242.

Noi sortiremmo dai prefissi limiti se volessimo ampiamente discutere queste equazioni che si riferiscono a quel genere di movimento che suol chiamarsi reciproco, in quanto che il liquido dal primo vaso entrando nel secondo, e sollevandosi per la concepita velocità ad un'altezza maggiore di quella che gli si competerebbe nello stato di equilibrio, riprende un moto inverso tornando a passare nel primo vaso, e stabilendosi in conseguenza una serie di oscillazioni di tutta la massa dall'uno all'altro recipiente.

248. Giova intanto osservare che se il primo recipiente è mantenuto costantemente allo stesso livello con afflusso perenne di nuovo liquido, che però non ne accresca la pressione superficiale, e se dopo un certo tempo è permesso di considerare il moto ridotto a stato permanente, sarà facile senza ulteriore integrazione dedurre dalla (A) il valore di U_1 e in conseguenza la velocità in una sezione qualunque. Supponendo infatti per maggior semplicità $\pi = \pi'$ essa convertesi nella

$$g(\zeta - \zeta') - \frac{n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) - \frac{n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)^2 = 0$$

da cui si trae

$$(C)\qquad U_1 = \sqrt{\frac{2g(\zeta - \zeta')}{\frac{n_1^2}{n^2} - \frac{n_1^2}{m^2} + \left(1 - \frac{n_1}{m_1}\right)^2}}.$$

E riguardo alle pressioni, avvertendo alle (φ) del §. 213, sarebbe pel vaso superiore

$$(D)\qquad p = \pi + \rho g z - \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

per l' inferiore

$$(D')\quad p_1 = \pi + \rho g(\zeta - \zeta' + z_1) - \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{m^2} + \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)^2\right)$$

$$= \pi + \rho g z_1 + \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right).$$

249. Se l' orifizio n_1 fosse piccolissimo in confronto di tutte le altre sezioni dei due vasi, tanto nel caso del livello stabile nel primo recipiente, quanto nel caso in cui le superiori superficie fossero variabili di posizione in ambedue, nella formula (A) si trascurerebbero i termini moltiplicati per n_1, laonde si avrebbe semplicemente

$$U_1 = \sqrt{2g(\zeta - \zeta')};$$

da cui apparisce che l' acqua effluente dalla luce n_1 è animata da una velocità dovuta alla differenza dell' altezza del liquido che le sovraincombe ne' due recipienti; e che però pareggiati i livelli, nulla sarebbe la velocità dell' efflusso, e quindi non avrebbe luogo il moto reciproco.

Le formule (D) e (D') diventano in tale ipotesi

$$(\Delta)\qquad p = \pi + \rho g z - \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2\omega^2}$$

$$(\Delta')\qquad p_1 = \pi + \rho g(\zeta - \zeta' + z_1) - \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + 1\right)$$

$$= \pi + \rho g z_1 - \frac{\rho n_1^2 U_1^2}{2\omega_1^2}.$$

Se i vasi comunicassero fra di loro per mezzo di fori laterali strettissimi gli ultimi risultamenti ottenuti sarebbero tuttavia applicabili; ma se le luci loro fossero di una sensibile altezza, converrebbe rinnuovare le considerazioni del §. 194. e seguenti.

250. Si prendano ora in considerazione due vasi che comunicano per il piccolissimo foro laterale n scevro da contrazione e si immagini che allo stesso livello di codesto foro si trovi similmente praticato in una parete del secondo vaso un altro piccolissimo orifizio n_1 che lasci sgorgare il liquido con velocità U_1. Si rappresentino al solito con ζ e ζ' le altezze del livello superiore al di sopra dei respettivi orifizii nel primo e nel secondo recipiente, e indicando con m_1 la sezione superiore del secondo vaso, si avrà Fig. 19

$$U=\sqrt{2g(\zeta-\zeta')}\qquad U_1=\sqrt{2g\zeta'}$$

E se si rappresenta con ρMdt la massa liquida che affluisce senza pressione addizionale nel primo vaso, evidentemente si avranno le due seguenti equazioni

$$(E)\qquad md\zeta=Mdt-ndt\sqrt{2g(\zeta-\zeta')}$$

$$(F)\qquad m_1d\zeta'=ndt\sqrt{2g(\zeta-\zeta')}-n_1dt\sqrt{2g\zeta'}.$$

251. Se la quantità M è indipendente da t, eliminando fra queste il dt si otterrà una relazione differenziale fra le altezze ζ e ζ', ma che in generale non può integrarsi. Nel caso che si supsupponga $M=0$, effettuata la eliminazione indicata, se ne deduce la

$$(G)\qquad \frac{md\zeta}{n\sqrt{\zeta-\zeta'}}=\frac{m_1d\zeta'}{n_1\sqrt{\zeta'}-n\sqrt{\zeta-\zeta'}}$$

In questa equazione, se m ed m_1 sono costanti, le variabili possono separarsi ponendo successivamente $\zeta=\zeta'\alpha$, ed $\alpha-1=\beta^2$; infatti dopo tali sostituzioni facilmente riducesi alla

$$(H)\qquad \frac{d\zeta'}{\zeta'}=\frac{2m(n_1-n\beta)\beta d\beta}{m(\beta^2+1)(n\beta-n_1)-m_1n\beta}$$

che è integrabile sotto forma finita.

252. Se il primo vaso è inesausto, sicchè possa considerarsi ζ costante ed eguale a k, basterà, per rintracciare le leggi del moto, la sola (F), dalla cui integrazione si dedurrà il valore di ζ' espresso per t. Dopo un certo tempo, uscendo tanto liquido dal secondo vaso quanto in pari tempo ve ne entra, la superficie suprema si comporrà in esso ad un altezza costante, il cui valore si dedurrà ponendo nella suddetta (F) $d\zeta'=0$, e dalla quale si trae

$$\zeta'=\frac{n^2k}{n^2+n_1^2}\quad\text{ed}\quad U_1=n\sqrt{\frac{2gk}{n_1^2+n^2}}\,.$$

253. Se il primo vaso non riceve liquido ed il secondo non ne perde, nelle (E) ed (F) saranno nulli i termini che contengono M, ed n_1, e però si otterrà coll' eliminazione

$$(I)\qquad md\zeta+m_1d\zeta'=0$$

mentre esse si riducono alle seguenti

$$(L)\qquad \begin{cases} md\zeta = -\,ndt\sqrt{2g(\zeta-\zeta')} \\ m_1 d\zeta' = ndt\sqrt{2g(\zeta-\zeta')}. \end{cases}$$

Integrando la (l) nella supposizione di m ed m_1 costanti, e denominando k e k' le altezze iniziali ζ e ζ' si avrà

$$(M)\qquad m\zeta + m_1\zeta' = mk + m_1k'$$

da cui si trarrà ζ espresso per ζ'.

Siccome poi

$$t = \int_k^{\zeta'} \frac{m_1 d\zeta'}{n\sqrt{2g(\zeta-\zeta')}}$$

indica il tempo che il liquido impiega a passare nel secondo recipiente dall'altezza k' all'altezza ζ', così effettuate le dovute sostituzioni e l'integrazione, si troverà questo tempo espresso dalla formula

$$(N)\qquad t = \frac{2m_1\sqrt{m}}{n(m+m_1)\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{m(k-k')} - \sqrt{mk+m_1k'-(m+m_1)\zeta'}\right\}.$$

Con analogo calcolo si ottiene

$$(N')\qquad t = \frac{2m\sqrt{m_1}}{n(m+m_1)\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{m_1(k-k')} - \sqrt{(m+m_1)\zeta - mk - m_1k'}\right\}$$

che è il tempo che impiega il liquido nel primo vaso dall'altezza k a passare all'altezza ζ.

Onde conoscere il tempo in cui il liquido si compone allo stesso livello nei due vasi, converrebbe porre $\zeta=\zeta'$ nella (M) che somministra

$$\zeta = \zeta' = \frac{mk+m_1k'}{m+m_1}$$

e sostituendo questo valore nella (N), o nella (N') si avrà il tempo cercato eguale a

$$(O)\qquad \frac{2mm_1\sqrt{(k-k')}}{(m+m_1)n\sqrt{2g}}.$$

254. Chi supponesse il primo recipiente inesausto, cosicchè l'altezza ζ rimanesse costante ed eguale a k, si dovrebbe integrare la sola equazione

$$m_1 d\zeta' = n dt\sqrt{2g(k-\zeta')}$$

da cui si trarrebbe

$$t = \frac{2m_1}{n\sqrt{2g}}\left(\sqrt{k-k'} - \sqrt{k-\zeta'}\right)$$

ed il tempo in cui i due livelli si pareggiano diverrebbe eguale a

$$\frac{2m_1}{n}\sqrt{\frac{k-k'}{2g}}$$

Questi due ultimi risultamenti potevano immediatamente ricavarsi dalla (N) e dalla (O) facendovi $m = \infty$.

255. Abbiansi parecchi vasi comunicanti per via di fori strettissimi $n, n', n'' \ldots \nu$. Il primo sia mantenuto costantemente pieno, e dalla luce dell' ultimo sgorghi il liquido liberamente. Si chiamino $x, x', x'' \ldots$ le differenze di livello supremo dal primo al secondo vaso, dal secondo al terzo ec., le quali si terranno per costanti, perchè il moto si suppone ridotto a stato permanente.

Se q rappresenta il volume fluido sgorgato nell' unità di tempo dall' ultimo orifizio a cui sovrasta il liquido ad un' altezza costante ζ, e si ponga $X = x + x' + x'' + \text{ec.} + \zeta$ si avrà

$$q = n\sqrt{2gx} = n'\sqrt{2gx'} = n''\sqrt{2gx''} = \text{ec.} = \nu\sqrt{2g\zeta}$$

da cui si ricava

$$x = \frac{\nu^2\zeta}{n^2}, \quad x' = \frac{\nu^2\zeta}{n'^2}, \quad x'' = \frac{\nu^2\zeta}{n''^2}, \text{ ec.}$$

e poichè

$$X = \nu^2\zeta\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2}\right)$$

si troverà

$$\zeta = \frac{X}{\nu^2\Sigma\frac{1}{n^2}}$$

256. Gli esempi contenuti in questo Capitolo possono servire di norma nella soluzione di analoghi quesiti in cui, le figure de' vasi non essendo prismatiche, si devono considerare le sezioni supreme di esse non più costanti, ma funzioni note e variabili di ζ e ζ'.

CAPITOLO X.

Della contrazione della vena.

257. Tutti i risultamenti ottenuti ne' precedenti capitoli sono basati nella supposizione che i filamenti fluidi che escono dall'infima luce dei recipienti sieno paralleli alla direttrice, ed animati da eguali velocità; e l'esperienza dimostra che allorquando le pareti de' vasi sono, nell' infima sezione, prossimamente parallele alla direttrice una tale ipotesi è bastantemente ammissibile; ma ogniqualvolta la parte inferiore di codeste pareti sia notabilmente inclinata alla linea direttrice, le molecule del fluido escono con direzioni oblique alla linea medesima dando luogo ad un particolar fenomeno, cui sì da il nome di *contrazione della vena.* Su di questo terremo breve discorso nel presente capitolo, perchè più ampj dettagli anzi che all'Idraulica teorica alla pratica apparterrebbero.

Abbiasi un vaso cilindrico ad asse verticale, trasparente, e nel centro del suo fondo orizzontale sia praticato in lastra piana e Fig. 20 sottile un foro circolare di piccolissima area *n*. Se questo recipiente contiene un liquido entro cui sieno nuotanti de' minuzzoli di sostanze di quasi eguale densità, o nel quale siasi formato un leggiero precipitato, si vedrà il liquido scendere verticalmente e per strati paralleli sino alla distanza di circa due diametri dal foro stesso; poscia ripiegarsi d'ogni parte verso di esso descrivendo delle linee curve sensibilmente convesse dalla parte dell' asse del vaso. Così la corrente del liquido in vicinanza della luce prende la figura di una conoide convergentissima, l'altezza della quale è di circa due diametri del foro, la cui base superiore è la sezione trasversale del vaso, e la base inferiore l'area del foro stesso. A questa conoide si da il nome di *gorgo* e rimane quasi stagnante presso gli orli dell' orifizio quel poco di fluido onde essa è contornata

258. La convergenza delle direzioni delle molecule del liquido che giungono all' orifizio continua anche per breve tratto dopo che lo hanno attraversato. Quindi la vena fluida prosegue grada-

tamente, ma rapidamente a restringersi, fintantochè le molecule che la costituiscono, per effetto della reciproca azione e dei moti impressi, prendono una direzione comune parallela all' asse dell'orifizio. Così si forma al di sotto della luce un' altra conoide che può aversi per continuazione della precedente, e che si chiama *vena contratta*. La sua base maggiore è l' orifizio, e la base minore è la sezione della massima contrazione ossia la *sezione della vena contratta*. Il diametro *nn* dell' orifizio, il diametro *εε* della sezione della vena contratta, e l' altezza *bc* della vena medesima stanno tra loro, secondo il Michelotti figlio, come i numeri:

100 : 79 : 39

e secondo Eytelwein prossimamente come

10 : 8 : 5.

Questo concorso di tutte le molecule al foro, ed il loro egresso per un imbuto conoidale, ha luogo qualunque sia la forma del vaso, e qualunque l' inclinazione della parete piana in cui sia aperta la piccolissima luce *n*, purchè sia praticata ad una certa distanza dalle altre faccie che formano l'interna capacità del recipiente.

259. Lasceremo ai fisici il porgere una più minuta descrizione della vena che sorte da una luce circolare al di la della contrazione, e la ricerca delle cause che ne determinano la figura. Noi ci limiteremo soltanto ad accennare che essa prosegue ad essere cilindrica per una breve lunghezza, finchè la resistenza dell' aria combinata ad altre circostanze la scompone interamente. Nella prima parte di una tale lunghezza la vena è limpidissima come un cristallo; poscia diviene torbida e discontinua, composta cioè di goccie separate sferoidiche, alternativamente allungate e depresse.

Ciò che importa conoscere agli idraulici per la dottrina degli efflussi si è la situazione e la dimensione della sezione della vena contratta ove le velocità delle molecule possono ritenersi parallele tra loro; poichè risguardando allora il recipiente, il gorgo, e la vena contratta come un sol recipiente continuo, ne sarà cognita la figura, e sarà permesso di assumerne per sezione dello sbocco la sezione di quest' ultima. E l'esperienza infatti dimostra che la natura dell'efflusso non cangia aggiungendo all'orifizio un tubo conoidale che secondi l'andamento della vena contratta.

260. Se tutte le molecule che giungono alla sezione di massima contrazione, fossero realmente animate della stessa velocità dovuta all'altezza ζ dell'acqua sovrastante, si avrebbe

$$U=\sqrt{2g\zeta}$$

e detta χ l'ampiezza incognita di questa sezione e mantenuto il recipiente a livello costante

$$q'=\chi\sqrt{2g\zeta}=\chi U$$

rappresenterebbe la quantità di liquido che passa per essa nell'unità di tempo. Ora, trascurando l'altezza della vena contratta in confronto di ζ,

$$q=n\sqrt{2g\zeta}=nU$$

esprimerebbe la portata teorica della luce n, se vi concorressero le molecule del liquido con direzioni parallele tra loro e normali al piano della medesima, e con la comune velocità dovuta all'altezza ζ. Dunque si avrebbe

$$\frac{q'}{q}=\frac{\chi}{n};$$

e però la portata effettiva, e la portata teorica starebbero fra loro come l'area della sezione della vena contratta sta a quella dell'orifizio n.

Volendo quindi ottenere il rapporto fra queste due sezioni, tanto sarebbe il dedurlo dalla misura diretta dei loro diametri quanto dal paragone della portata effettiva colla teorica. Ma le molecule che lambiscono l'orlo dell'orifizio sono ritardate nel loro moto dall'attrito che soffrono, e questa resistenza va comunicandosi con differente intensità alle molecule che passano più vicine al centro. Onde la velocità nella sezione della vena contratta non sarà per tutto uniforme. Chiamando U_1 la velocità media che ivi ha luogo, la quale a tutto rigore deve essere minore di U, la portata effettiva sarà $q'=\chi U_1$, e perciò otterremo

$$\frac{q'}{q}=\frac{\chi}{n}\frac{U_1}{U}$$

Il rapporto $\frac{q'}{q}$ si chiama il coefficiente della portata teorica, ossia il numero per cui si dee moltiplicare questa portata onde ottenerne l' effettiva. E il rapporto $\frac{\chi}{n}$ dicesi coefficiente di contrazione, vale a dire il numero per cui conviene moltiplicare l' area dell' orifizio per conoscere la grandezza della sezione della vena contratta. Quello ottiensi paragonando le portate, questo misurando direttamente le sezioni suddette; e poichè $\frac{U_1}{U}$ è necessariamente una frazione, il coefficiente della contrazione deve sempre essere maggiore del coefficiente della portata.

261. Assumendo le dimensioui riportate dal Bidone sarebbe $\frac{\chi}{n}=\frac{2}{3}$ e $\frac{q'}{q}=0,62$; onde $\frac{U_1}{U}=0,93$, e perciò la velocità media della sezione contratta non sarebbe che $\frac{93}{100}$ della velocità dovuta all'altezza dell' acqua sovrastante. Prendendo invece le dimensioni adottate da Eytelwein avremmo

$$\frac{\chi}{n}=0,64,\ \text{onde}\ \frac{U_1}{U}=\frac{0,62}{0,64}=0,97.$$

In pratica, però, si suole ritenere $U_1=U$ confondendo così il coefficiente di contrazione con quello della portata; e indicandolo in generale colla lettera ε si avrà

$$\chi=\varepsilon n,\quad q'=\varepsilon q.$$

Laonde le formule tutte che abbiamo dedotte relativamente alla velocità dell' efflusso e alla portata delle sezioni infime dei recipienti continui, o composti, varranno anche per l' efflusso dalle luci incavate in lastra sottile, purchè in luogo dell' orifizio vero n si ponga la sezione della vena contratta εn, dando poi ad ε quei valori numerici che l' esperienza mostrerà convenirgli.

262. Se la luce è praticata in guisa che un liquido grave ne sgorghi dal basso all' alto verticalmente, si vede il getto risalire quasi fino all' altezza ζ del livello supremo del recipiente, e vi giungerebbe esattamente se la resistenza dell' aria, e il liquido che ricade sopra se stesso, non ne ritardassero il movimento.

La resistenza dell'aria crescendo al crescere della velocità, la descritta esperienza meglio riesce ogniqualvolta la celerità del getto è dovuta ad una piccola altezza.

263. Quando si ammetta l'ipotesi del moto lineare, si può calcolare la figura del getto verticale, tanto saliente, quanto discendente, che ha luogo per una luce circolare εn colla velocità di projezione

$$U=\sqrt{2g\zeta}.$$

Infatti dopo che le molecule avranno percorso un spazio z a partirsi dalla luce, dipendentemente dall'azione della gravità che ne accelera o ne ritarda il moto secondo che il getto si fa dall'alto al basso o dal basso all'alto, saranno animate dalla velocità

$$V=\sqrt{2g(\zeta\pm z)}.$$

E se la sezione circolare ω che corrisponde a questa altezza z si eguagli a ϖr^2, indicandone con r il raggio, si dovrà porre

$$U\varepsilon n=V\omega$$

ossia

$$\varpi r^2\sqrt{2g(\zeta\pm z)}=\varepsilon n\sqrt{2g\zeta}$$

da cui

$$r^4=\frac{\varepsilon^2 n^2\zeta}{\varpi^2(\zeta\pm z)}$$

equazione di una superficie di rotazione attorno ad un asse verticale generata da una curva iperbolica, le cui coordinate correnti sono r e z.

La resistenza dell'aria nel getto dall'alto al basso in cui le velocità crescono moltissimo, impedisce che si riscontri rigorosamente questa figura: ma nel getto verticale saliente, la iperboloide di rivoluzione che va allargandosi superiormente è sensibilissima.

264. Quando la direzione del getto è inclinata alla verticale perchè il piano ove è praticata la luce è obliquo, l'asse della vena descrive una parabola il cui parametro è prossimamente quadruplo dell'altezza del livello supremo al di sopra del centro

della sezione della vena contratta; la quale esperienza è una novella prova che il liquido sgorga da questa sezione con una velocità dovuta all'altezza dell'acqua sovrastante, come se il gorgo e la vena contratta formassero unitamente al recipiente un solo vaso continuo.

265. Allorchè gli orifizj praticati in lastre piane sottili non sono circolari ma poligoni, l'esperienza dimostra la formazione del gorgo e della vena contratta, ma il getto cangia continuamente di figura, via via che si allontana dall'orifizio.

Le faccie della vena fluida corrispondenti ai lati dell'orifizio vanno successivamente incavandosi, e gli spigoli di quella corrispondenti agli angoli di questo si smussano, e finiscono per rendersi concavi. Un tale fenomeno è conosciuto sotto il nome di inversione di figura della vena, poichè la di lei sezione trasversale diventa quasi simile alla figura dell'orifizio che abbia girato nel proprio piano di un angolo semiretto, modificandosi in tal guisa, che le linee diametrali più lunghe dell'una, corrispondono alle più corte dell'altra. Qualunque sia però la figura dell'orifizio, in una sezione della vena prossima ad esso ha luogo la contrazione, ed ivi le molecule sono animate da velocità pressochè eguali e parallele.

266. Le esperienze fatte relativamente all'efflusso dell'acqua per minimi orifizj aperti in pareti piane sottilissime, mostrano che per ottenere il coefficiente ε della portata, che poco differisce dal coefficiente di contrazione, si devono distinguere, primieramente, le luci circolari il cui diametro supera $0^m,015$ in secondo luogo, quelle il cui diametro è minore di questa quantità.

Nel primo caso può supporsi $\varepsilon = 0,61$ quando l'altezza dell'acqua al di sopra del centro dell'orifizio supera 100 volte il diametro del medesimo. Diminuendo la carica, ε aumenta; e quando l'altezza dell'acqua è ridotta a 10 volte il diametro diventa $\varepsilon = 0,62$. Finalmente si ha $\varepsilon = 0,66$ allorchè la carica al di sopra del vertice dell'orifizio non è più che una piccola parte del diametro del medesimo.

Nel secondo caso il valore di ε aumenta al diminuirsi del diametro della luce, e si ha persino $\varepsilon = 0,7$ quando codesto diametro è di un millimetro.

Questi risultati convengono tanto agli orifizj circolari quanto agli orifizj quadrati, rettangoli, ed anche poligoni, purchè non abbiano angoli rientranti, e si prenda per loro diametro la linea diametrale che ne costituisce la più piccola dimensione.

267. Il fenomeno della contrazione traendo origine dal concorso obliquo dei filamenti fluidi all' asse dell' orifizio, tutte le circostanze che tendono ad accrescere o a diminuire una tale obliquità, produrranno una variazione nella portata, e quindi anche nel valore del coefficiente ε.

A cagion d' esempio quando un orifizio rettangolare è praticato in una parete piana verticale, se uno de' suoi lati si accosta al piano di livello, o al piano del fondo del recipiente, la contrazione diminuisce; e se codesto lato fosse disposto rasente il fondo, la contrazione sarebbe per esso totalmente soppressa, e l' asse della vena effluente diverrebbe inclinato al piano dell'orifizio. Se poi la luce è incavata nel fondo, la contrazione diminuirà a misura che le pareti laterali si approssimeranno alla luce medesima.

Quando poi si tratti di vasi formati da superficie curve, è evidente che se la luce è incavata in una parete concava o convessa verso l'interno del recipiente, la vena liquida soffrirà nel primo caso minore, e nel secondo maggiore contrazione di quella cui anderebbe soggetta scaturendo dallo stesso orifizio praticato in lastra piana.

268. Dobbiamo al Bidone una serie di esperienze relative alla determinazione del coefficiente ε per le vene che sortono da fori incavati in superficie piane, e nel contorno de' quali sia soppressa parzialmente la contrazione mediante alcune lastre saldate normalmente, ed in contorno agli orifizj stessi dalla parte interna del recipiente.

Per le luci rettangole il cui perimetro sia c, e nelle quali sia soppressa per una porzione γ la contrazione, egli ha trovato la seguente formula empirica che rappresenta con sufficiente esattezza la portata

$$q = \varepsilon n \sqrt{2g\zeta}\left(1 + 0{,}152\,\frac{c}{\gamma}\right)$$

dove ε ha i valori che competono ad una luce nuda incavata in lastra sottile.

Per gli orifizj circolari

$$q = \varepsilon n\sqrt{2g\zeta}\left(1 + 0{,}128\,\frac{c}{\gamma}\right)$$

Queste formule vanno bastantemente d' accordo coi resultati dell' esperienza, finchè in una parte soltanto del perimetro delle luci rimane impedita la contrazione. Che se tutto all' intorno dell' orifizio fosse saldata una lastra che a guisa di un brevissimo tubo, o di un anello, si internasse nel recipiente, il fenomeno sembra cangiare di natura, poichè, come per salto, la portata effettiva acquista un valore più grande di quello che è somministrato dalle formule precedenti.

269. Quando però codesto tubetto si internasse considerabilmente entro la massa liquida contenuta nel recipiente, il coefficiente di contrazione acquisterebbe invece un minimo valore che secondo le esperienze di Borda ridursi potrebbe persino a $\frac{1}{2}$. Questo celebre fisico ha procurato di dare la seguente spiegazione teorica dell' esposto notabile fatto.

Si indichi con ε' il valore incognito del coefficiente di contrazione relativo ad un tubetto orizzontale adattato ad una luce verticale n ed insinuato nell' interno del recipiente. L' espressione della forza di reazione del getto sarà (§. 210)

$$2\varepsilon'\rho n g\zeta.$$

Ma questa forza non risulta che dalla differenza di pressione che ha luogo tra la faccia in cui è praticato il foro, e la parallela ed opposta. E poichè tutti i punti di esse possono considerarsi, per la piccolezza della luce, premuti come se il fluido fosse in equilibrio, così questa differenza sarà espressa da $\rho n g\zeta$, onde

$$2\varepsilon'\rho n g\zeta = \rho n g\zeta$$

da cui
$$\varepsilon' = \frac{1}{2}.$$

Null' altro per ora dovremo aggiungere sù questo argomento nè sulle ricerche sperimentali relative alla contrazione e alla portata nelle grandi aperture a piano verticale, ed aperte superiormente, giacchè di tutto questo sarà mestieri tenere più amplo discorso nella parte di quest' opera che si riferisce in particolar modo alle pratiche applicazioni.

CAPITOLO XI.

Del moto dei liquidi per i tubi.

270. Allorchè è congiunto un tubo ad una piccola luce praticata sulle pareti o sul fondo di un gran recipiente inesausto, e l' annestatura è in tal guisa formata che secondi il naturale andamento della vena contratta, il recipiente unitamente al tubo formeranno un sistema continuo, ed il moto del liquido per il medesimo sarà facile a calcolarsi dipendentemente dalle teorie spiegate negli antecedenti capitoli.

Ma se la luce è scolpita in lastra sottile, ed il tubo vi è immediatamente applicato, il liquido sgorgando obliquamente dall' orifizio nel tubo, forma la vena contratta senza toccare alle pareti di questo. Se però il tubo ha la conveniente figura e lunghezza, in certe circostanze di cui più sotto parleremo, avviene che il liquido dopo la vena contratta torna a riempire l' interna capacità del tubo; cosicchè all' origine del medesimo. e precisamente ove si forma la sezione della massima contrazione, si potrà immaginare come ingombro da un diaframma che ne ristringa la corrispondente sezione nel rapporto di $\varepsilon:1$. Un' esperienza del Venturi porge una sensibile giustificazione di una tale maniera di risguardare il fenomeno. Applicò egli all' origine di un tubo cilindrico, ove suol formarsi la massima contrazione, un diaframma che ne restringeva la sezione nella proporzione prossimamente di $5:8$; e vide uscirne nello stesso tempo tanto liquido, quanto ne sgorgava in eguali circostanze, senza il diaframma.

271. La teoria del moto per i tubi lunghi e corti alimentati da recipienti inesausti dipende dalle leggi del moto per i vasi discontinui. Soltanto quì giova osservare che allorquando i tubi sono

molto lunghi, non si potrà fare astrazione dalla resistenza che soffre il liquido che scorre per essi, la quale resistenza dipende dall' adesione che hanno le molecule del fluido tra loro e colle pareti del tubo. Infatti se il tubo è formato di una sostanza che resti bagnata dal liquido, uno strato di questo ne riveste la superficie interna; ed è sopra un tale strato che scorre la colonna liquida, risentendone nella superficie di contatto un attrito che si comunica gradatamente diminuendo agli strati adiacenti, e giungendo persino al filamento più lontano.

La massa liquida acquista conseguentemente una velocità media minore di quella che avrebbe luogo senza l' azione delle pareti, e senza la viscosità del fluido.

Questa specie di attrito è di natura diversa di quella che ha luogo tra solidi e solidi, non dipendendo nè dalla pressione, nè dalla natura delle superficie che strisciano le une sull' altra. Di ciò può rendersi ragione osservando che qualunque sia la sostanza onde è composto il tubo, se è bagnata dal liquido, questi scorrendo nell'interna capacità si muove sempre strisciando sul velo fluido che la bagna.

272. Essendo la resistenza un effetto dell' azione delle pareti, certo è che quanta maggiore estensione avrà il perimetro bagnato di ciascuna sezione trasversale, tanto più codesta forza sarà considerabile. E poichè una tal resistenza operata nel perimetro si ripartisce sopra tutte le molecule situate nella corrispondente sezione, così quanto più questa sarà grande, tanto meno la velocità media di essa ne rimarrà alterata.

Sarà dunque l' effetto della resistenza in ragion diretta del perimetro bagnato, e nell' inversa della sezione; dovrà cioè riguardarsi inversamente proporzionale al *raggio medio* della sezione che si considera; dandosi questo nome al rapporto fra l'area ed il perimetro di essa.

273. Un tale effetto crescerà ancora al crescere della velocità perchè maggiore sarà il numero delle molecule che soffriranno nello stesso tempo quell' attrito, che toglie loro una determinata parte della precedente velocità. Quindi con considerazioni analoghe a quelle che si fanno relativamente all' urto de' liquidi sono stati indotti i fisici a supporlo per questa causa proporzio-

nale al quadrato della velocità. La viscosità del fluido produce ancora per parte sua un' altra resistenza che è tanto più sensibile in confronto della prima quanto la velocità è più piccola.

274. Tutte queste viste teoriche combinate coi risultati delle esperienze ci determinano a riguardare la resistenza di cui parliamo come una forza ritardatrice gR che agisce in senso opposto alla direzione delle molecule, ed espressa dalla formula

$$gR = g\frac{\alpha V + \beta V^2}{D} = g(\alpha V + \beta V^2)\,\frac{\nu}{\omega}$$

in cui g è la forza acceleratrice della gravità; ν il perimetro bagnato della sezione ω cui corrisponde la velocità media V; $D = \frac{\omega}{\nu}$ è il raggio medio; ed α e β rappresentano due coefficienti numerici che sono stati determinati da varii Idraulici sperimentatori.

275. Proponiamoci ora di risolvere colle formule del Capitolo VIII. il seguente problema, che comprende come casi particolari la massima parte di quelli che affacciare si possono nella teoria del moto dell' acqua per i tubi lunghi e corti. Fig. 21

Abbiasi un sistema formato da due recipienti A, e B e mantenuti costantemente pieni ai rispettivi livelli mm, ed nn e comunicanti fra di loro per mezzo di un tubo n_1n_2.

Suppongasi, per la sottigliezza di questo tubo in confronto dei vasi, il moto ridotto permanente, e si facciano le seguenti denominazioni.

$m =$ sezione mm dove ha luogo la pressione π.

$n =$ Sezione nn contro cui si esercita la pressione π'.

$\omega =$ Area di una sezione trasversale qualunque dei vasi, o del tubo, e alla profondità z dal livello mm.

$n_1 =$ luce del vaso A, e sezione prima dal tubo posta alla profondità ζ' dal suddetto livello mm.

$m_1 = \varepsilon n_1 =$ Sezione della vena contratta.

$n_2 =$ sezione ultima del tubo alla profondità ζ'' dalla luce n_1.

$m_2 =$ Sezione prima m_2m_2 del secondo recipiente B alla profondità ζ''' dalla sezione nn.

U Velocità in n.

Google

U_2 Velocità in n_2.
V Velocità media in una sezione ω del tubo.
l Lunghezza del tubo.
λ lunghezza di una porzione di esso fino alla profondità z
$\zeta'+\zeta''-\zeta'''=\zeta$ eguale alla distanza tra mm ed nn.

276. Se l'annestatura del tubo non seconda l'andamento della vena contratta il sistema descritto avrà due discontinuità, una nella sezione della massima contrazione $\varepsilon n_{\varepsilon}$, l'altra in n_2; applicandovi quindi le formule del §. 243. si avrà la pressione in una sezione ω del recipiente A espressa da

$$(a)\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+\int_s^q Td'\sigma-\frac{n^2U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{\pi}{\rho}+\int_s^\sigma Td'\sigma$$
$$-\frac{n_2U_2^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

Per le sezioni del tubo

$$(a')\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}+\int_s^\sigma Td'\sigma-\frac{n_2^2U_2^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{m^2}\right)-\frac{n_2^2U_2^2}{n^2}\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^2$$
$$=\frac{\pi'}{\rho}-\int_\sigma^{s'} Td'\sigma-\frac{n_2^2U_2^2}{2}\left[\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{m_2}\right)^2\right]$$

e per una sezione qualunque ω del recipiente B ad una profondità z_1 dal livello nn

$$(a'')\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi'}{\rho}-\int_\sigma^{s'} Td'\sigma-\frac{n^2{}_2U_2^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalmente la velocità U_2 all' imboccatura del tubo nel recipiente (B) potrà dedursi dalla (ε) dove si porrà $\frac{dU}{dt}=0$ e che in conseguenza riducesi alla

$$(b)\qquad \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'} Td'\sigma-\frac{n_2^2U_2^2}{2}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{1}{n_1^2}\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^2+\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{m_2}\right)^2\right]$$

Quando il secondo recipiente sia tale che formi col precedente un solo tubo continuo di cui n sia l'estrema sezione, dovremo porre in quest'ultima formula

$$U=U_2,\ m_2=n_2=n$$

e però si avrà

$$(b')\qquad \frac{\pi'-\pi}{\rho}=\int_s^{s'} Td'\sigma-\frac{n^2U^2}{2}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{1}{n_1^2}\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^2\right]$$

277. Gli integrali $\int_s^\sigma Td'\sigma$, $\int_s^{s'} Td'\sigma$, contenuti in queste equazioni sono composti di termini che dipendono in parte da forze moventi, e in parte da forze resistenti. Così per esempio, volendo considerare la sola gravità, e la resistenza di attrito di cui si è sopra descritta l'azione, si avrà

$$\int_s^\sigma Td'\sigma = gz - g\int_s^\sigma Rd'\sigma = gz - g\int_s^\sigma \frac{(\alpha V + \beta V^2)}{D} d'\sigma$$

E quando non si tenga conto della resistenza che lungo il tubo

$$\int_s^\sigma Td'\sigma = gz - g\int_0^\lambda Rd'\sigma$$

$$\int_s^{s'} Td'\sigma = g(\zeta' + \zeta'' - \zeta''') - g\int_0^l Rd'\sigma = g\left(\zeta - \int_0^l Rd'\sigma\right)$$

Avendosi poi $V = \frac{nU}{\omega}$, sarà

$$R = \frac{\alpha n}{D\omega} U + \frac{\beta n^2}{D\omega^2} U^2$$

e però

$$\int_0^l Rd'\sigma = \alpha nU \int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega} + \beta n^2 U^2 \int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega^2}$$

Sostituendo dunque nella (*b*), dove per semplicità si porrà $\pi = \pi'$, e

$$(1) \qquad K = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{n_1^2} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right)^2$$

si otterrà

$$(c) \quad nU = n_1 U_1 = -\frac{-g\alpha\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega} \pm \sqrt{\left(g\alpha\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega}\right)^2 + 8g\zeta\left(K + \beta g\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega^2}\right)}}{2\left(K + \beta g\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega^2}\right)}$$

278. Allorchè il tubo è molto stretto in confronto del primo dei recipienti, per le sezioni ω comparabili con m si potranno trascurare le frazioni $\frac{1}{m}$ ed $\frac{1}{\omega}$, e però la pressione nel recipiente A si ridurrà semplicemente alla seguente

$$(\beta) \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + gz$$

come se l' acqua vi fosse stagnante. Nel gorgo poi, e nella vena contratta che si considerano come facenti parte del primo recipiente, ma dove le sezioni diminuiscono rapidamente, non si trascurerà che la frazione $\frac{1}{m^2}$, e però si ridurrà a

$$(\beta') \qquad p = \frac{\pi}{\rho} + gz - \frac{n_2^2 U_2^2}{2\omega^2}.$$

Finalmente nel tubo avrà per valore uno qualunque dei due

$$(\beta'') \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + gz - g\int_0^\lambda R d'\sigma - \frac{n_2 U_2^2}{2n_1^2}\left(\frac{n_1^2}{\omega^4} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2\right)$$

$$(\beta''') \; \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g(\zeta - z) + g\int_\lambda^l R d'\sigma - \frac{n_2^2 U_2^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right)^2\right)$$

L'espressione poi di U data dalla (c) si semplicizzerebbe poichè K riducesi a

$$(2) \qquad \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{1}{n_1^2} + \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right)^2$$

E se il secondo recipiente fosse soppresso, si avrebbe con sempre maggiore semplicità

$$(3) \qquad K = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{1}{n_1^2}.$$

279. Applichiamo queste formule al caso in cui il tubo sia per tutto di egual diametro, sicchè per esso abbiasi $\omega = n_1 = n_2$ e D costante. Sarà

$$\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega} = \frac{l}{Dn_2}, \qquad \int_0^\lambda \frac{d'\sigma}{D\omega} = \frac{\lambda}{Dn}$$

$$\int_0^l \frac{d'\sigma}{D\omega^2} = \frac{l}{Dn_2^2}, \qquad \int_0^\lambda \frac{d'\sigma}{D\omega} = \frac{\lambda}{Dn_2}$$

per cui

$$nU = n_2 U_2 = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8\zeta D\left(\frac{Kn_2^2}{g\alpha^2} D + \frac{\beta l}{\alpha^2}\right)}}{\frac{2\beta}{\alpha}\frac{l}{n_2} + \frac{2Dn_2K}{g\alpha}}$$

la quale espressione converrà poi sostituirla nei valori delle pressioni relative ai recipienti ed ai tubi, con che si deve per esse ottenere un risultato positivo altrimenti sarebbe tolta la continuità del getto.

Quando il recipiente B è soppresso il valore di K che dovrà sostituirsi in questa formula sarà

$$(4) \qquad K = \frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 + 1\right) \quad \text{perchè} \quad n_1 = n.$$

280. Allorchè si faccia astrazione dalla resistenza per la brevità del tubo, converrà supporre $R=0$, cioè $\alpha=0$ e $\beta=0$, e però la (c) somministrerà semplicemente

$$(d) \qquad n_2 U_2 = nU = \sqrt{\frac{2g\zeta}{K}}\,;$$

in cui K avrà in generale il valore (1), e ne' varii casi particolari contemplati acquisterà i valori (2), (3), o (4).

La pressione nel gorgo e nella vena contratta sarà tuttavia somministrata dalla (β'). E per le sezioni del tubo inferiori si avrà

$$(d') \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + gz - \frac{n_2^2 U_2^2}{2n_1^2}\left(\frac{n_1^2}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2\right).$$

Che se il tubo fosse annestato nel recipiente a seconda della vena contratta, sarebbe $\varepsilon = 1$; onde quest' ultima diverrebbe

$$(d'') \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + gz - \frac{n_2^2 U_2^2}{2\omega^2}$$

nella qual formula si legge la regola del Bernoulli.

281. Talvolta i tubi sono interrotti da diaframmi che ne restringono le sezioni. Abbiasi a cagion d' esempio un diaframma sottilissimo di luce f applicato ad una sezione γ del tubo. Siccome accadrà la contrazione, εf sarà la luce effettiva del diaframma per cui passa il liquido. Supponendo che questi dopo la vena contratta torni ad occupare la capacità interna del tubo che immagineremo invariata per sì breve tratto, dovrà aggiungersi alla quantità K il termine che si riferisce a una tale discontinuità, cioè

$$\left(\frac{1}{\varepsilon f} - \frac{1}{\gamma}\right)^2.$$

Se il ristringimento si prolungasse per più di due diametri del tubo e poi ritornasse la sezione γ, vi sarebbe ancora una nuova discontinuità all' egresso da un tal diaframma prolungato, per cui i termini da aggiungersi sarebbero i seguenti

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\frac{1}{f^2}+\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{\gamma}\right)^2.$$

Se invece di un ristringimento vi fosse una varice ossia un rigonfiamento cilindrico di sezione f', avrebbe luogo una discontinuità all' ingresso per essa varice, e una contrazione all' egresso, e però bisognerebbe aggiungere al mentovato valore di K i termini

$$\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{f'}\right)^2+\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2.$$

I valori delle pressioni dovrebbero essere modificati analogamente coll' aggiunta de' termini che dipendono dalle introdotte nuove discontinuità.

282. Molti sono gli interessanti problemi che si possono risolvere coll' ajuto di tutte le formule stabilite in questo capitolo, ma soltanto di pochi ci sarà permesso occuparsi. La (c), a cagion di esempio si presta tanto ad assegnare la velocità dell' efflusso, date le figure dei vasi e dei tubi, quanto a sciogliere il problema inverso di determinare la forma di codesti recipienti onde ottenere per U_2 un dato valore.

Supponiamo che soppresso il secondo recipiente B si tratti soltanto di discutere la natura dell' efflusso di un liquido grave per un tubo cilindrico rettilineo, inclinato alla verticale di un angolo φ, ed annestato al recipiente in luce aperta in lastra sottile. L' equazione (b), osservando che $\zeta''=l\cos\varphi$ ed R è costante, e fatto $\pi=\pi'$, somministrerà

$$(\delta)\qquad nU=\sqrt{\frac{2g\left(\zeta-\int_0^l Rd'\sigma\right)}{K}}=\sqrt{\frac{2g[\zeta'+l(\cos\varphi-R)]}{K}}$$

in cui K avrà il valore (4).

La pressione nel tubo dedotta dalla (β''') verrà determinata dalla

$$(\delta')\qquad \frac{p}{\rho}=\frac{\pi}{\rho}-g(\zeta-z)+gR(l-\lambda)=\frac{\pi}{\rho}+g(l-\lambda)(R-\cos\varphi)$$

e la velocità V sarà per tutto $=U$.

E qui si vede che posto $\cos\varphi = R$ rimane la velocità dell'efflusso indipendente dalla lunghezza del tubo ed espressa da

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta'}{n^2 K}}$$

mentre la pressione diventa costante per tutte le sezioni ed eguale a π.

In questo caso la componente $g\cos\varphi$ della gravità, parallela all' asse del tubo, è continuamente distrutta dalla resistenza gR. L' inclinazione φ che soddisfa alla propostaci condizione verrà determinata dalla

$$R = \cos\varphi = \frac{\alpha U + \beta U^2}{D} = \frac{2}{D}\left(\frac{\alpha}{n} \sqrt{\frac{g\zeta'}{2K}} + \frac{\beta\zeta'}{n^2 K} \right).$$

Se poi si avesse $\cos\varphi > R$, cioè se la resistenza fosse minore della gravità relativa $g\cos\varphi$, U crescerebbe all'allungarsi del tubo, mentre la pressione in una stessa sezione si renderebbe minore. Accadrebbe il contrario ogniqualvolta fosse $\cos\varphi < R$: ossia quando la resistenza superasse la suddetta componente della gravità.

283. Possono applicarsi ancora le trovate formule ai brevi tubi addizionali per cui si considerano nulle le resistenze. La (d) ponendovi il valore (3) di K somministra per la velocità U dalla luce n di questi tubi applicati ad un orifizio n_1 scolpito in una parete sottile di un gran recipiente

$$(E) \qquad U = \sqrt{\frac{2g(\zeta' + \zeta'')}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{n^2}{n_1^2}}}$$

E se l' annestatura fosse formata a seconda della vena contratta varrebbe la stessa espressione colla semplice supposizione di $\varepsilon = 1$.

Egli è però indispensabile, per la retta applicazione di questa formula da cui si deducono le portate dei varii tubi addizionali, che questi sieno proporzionati in guisa, e di tali sostanze costruiti, che il liquido dopo la contrazione torni nuovamente a riempirne l' interna capacità, sicchè l' efflusso per essi abbia luogo a *bocca piena*. Perchè ciò accada, è mestieri innanzi tutto, che la pressione per tutta la conoide formata dal gorgo e dalla vena contratta, nonchè per tutte le inferiori sezioni del tubo addizionale, sia positiva.

284. Se la prima condizione si verifica facile sarà il persuadercene mediante la (β') dove si porrà per $U_\bullet$ ossia per U il soprascritto valore facendovi

$$\omega = \varepsilon n_1\,,\ \text{e}\ \ z = \zeta'$$

con che si determinerà la pressione nella sezione della vena contratta che è la minima: dovrà dunque essere positivo il valore di p tratto dalla seguente

$$(e)\qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g\left\{\frac{\zeta'\left(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 - \frac{n^2}{n_1^{\,2}}\right) - \frac{n^2}{n_1^{\,2}}\zeta''}{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2\frac{n^2}{n_1^{\,2}}}\right\}$$

La seconda condizione rimarrà poi soddisfatta ogniqualvolta per una sezione ω del tubo, alla profondità ξ dall' imboccatura ossia dalla vena contratta, sia positivo il seguente valore di p dedotto dalla (d')

$$(f)\qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g(\zeta' + \xi) - g(\zeta' + \zeta'')\,\frac{\frac{1}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{1}{n_1^{\,2}}}{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{1}{n_1^{\,2}}}\,.$$

285. Se il tubo è cilindrico la (e) riducesi alla

$$(e')\qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g\left(\frac{\zeta'(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon) - \zeta''}{2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1}\right) = \frac{\pi}{\rho} - g\left(\frac{(2\varepsilon - 2\varepsilon^2)\zeta' + \zeta''}{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2}\right)$$

e la (f) alla

$$(f')\qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\pi}{\rho} + g(\xi - \zeta'')\,.$$

286. Le (e) e le (f) serviranno poi tanto per i tubi conici convergenti quanto per i divergenti supponendovi $n_1 < n$, oppure $n_1 > n$; e per questi ultimi sarà facile assegnare il massimo rapporto $\frac{n}{n_1}$ che dà un valore positivo della pressione.

Si noti che essendo ε una frazione, $2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ sarà quantità positiva, e così pure $\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2$; e di più questa ultima non potrà superare l' unità.

287. Quando anche la pressione entro il tubo fosse positiva, ma riescisse minore della pressione atmosferica π, aprendosi in quel luogo della parete un piccolo foro, l'acqua non sortirà per esso, ed invece l'aria esteriore s' introdurrà ad interrompere la continuità del getto. Da questa circostanza trae origine il fenomeno della comunicazione laterale del moto descritto dal Venturi, il quale consiste nella proprietà di cui gode una vena fluida di attrarre e trascinare con se le vicine particelle dell' acqua e dell' aria. L' attento esame delle (e), (f), (e') ed (f') ci renderà manifesto, tanto per i tubi cilindrici quanto per i tubi conici convergenti o divergenti, i casi in cui ciò possa accadere.

288. Supponendo a cagion d' esempio $\varepsilon = 1$, cioè nulla la contrazione, e $\zeta'' = 0$ vale a dire l'asse del tubo orizzontale, si vede che per il tubo cilindrico si ha costantemente $p = \pi$; sicchè l'acqua vi scorrerebbe egualmente anche scoprendolo superiormente a guisa di doccia. Per i tubi convergenti o divergenti, all'origine del tubo si avrebbe

$$p = \frac{\pi}{\rho} - g\left(\frac{n^2}{n_1^2} - 1\right)\zeta',$$

onde la pressione riescirebbe maggiore dell'atmosferica per quelli, minore per questi.

289. Assicurati mediante le additate verificazioni, che per tutto il gorgo, e per tutte le sezioni del tubo addizionale sia la pressione positiva, e quindi ripiena l' interna capacità di esso, la formula (E) potrà servire a calcolare la velocità dell' efflusso; e moltiplicandola per la sezione dello sbocco somministrerà la portata nell' unità di tempo.

Limitandoci a parlare de' tubi ad asse orizzontale, osserveremo che essa riducesi alla

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta'}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{n^2}{n_1^2}}}$$

La quale confrontata colla velocità $\sqrt{2g\zeta'}$ corrispondente ad una nuda luce ci dimostra che l' aggiunta del tubo diminuisce sempre la velocità sia esso cilindrico o conico, a meno che non si possa supporre $\varepsilon = 1$; il che sarebbe permesso quando l' annestatura secondasse l' andamento della vena contratta.

Ciò non pertanto l' applicazione del tubo addizionale senza secondare la vena può produrre portata maggiore in quanto che la velocità deve essere moltiplicata per la sezione dello sbocco, e questa ne' tubi cilindrici o divergenti è sempre maggiore della sezione εn della vena contratta per cui conviene moltiplicarsi la velocità dell' acqua effluente dalla nuda luce onde ottenerne la portata. Chiamando dunque q la portata per l' orifizio n_1, e q' quella pel tubo addizionale la cui estrema sezione è n, avremo

$$q = \varepsilon n_1 \sqrt{2g\zeta'}$$

$$q' = n \sqrt{\frac{2g\zeta'}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{n_1^2}{n^2}}}$$

E con queste formule si potrà vedere quali tubi aumentano, quali diminuiscono la portata.

290. Allorquando il tubo è cilindrico

$$q : q' :: \varepsilon : \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2}} :: \sqrt{\varepsilon^2 + (\varepsilon - 1)^2} : 1$$

per cui si vede che q' supera q.

Se il tubo fosse divergente q' sarebbe sempre più grande; ma giova ripetere che in questa divergenza non si può oltrepassare il limite in cui la pressione fosse per diventare negativa.

291. Se il tubo è annestato a seconda della vena contratta avremo

$$q' = n\sqrt{2g\zeta'};$$

e se Q rappresenta la portata $n_1\sqrt{2g\zeta'}$ della luce n_1 scevra da contrazione, per i tubi cilindrici si avrà $q' = Q$; $q' > Q$ per i divergenti; $q' < Q$ per i convergenti. E ciò era ben naturale a prevedersi perchè in questo caso il tubo riunito al recipiente non forma che un solo vaso continuo, da cui sotto eguale carica sortirà tanta maggior copia di liquido quanto sarà più grande la luce.

292. L'esperienza va bastantemente d'accordo coi resultati della teoria relativi ai tubi addizionali cilindrici che superano in lunghezza almeno due diametri del foro ma non tanto però da rendere sensibile la resistenza d'attrito.

Lo stesso accade rispetto ai conici convergenti, fuorchè nel caso in cui, essendo molta la convergenza dei filamenti fluidi che sgorgano dalla bocca del tubo, ha luogo esteriormente una nuova contrazione. Allora la portata deve calcolarsi non più per la sezione estrema del tubo, ma per la sezione della vena contratta esteriore.

Nei tubetti addizionali conici divergenti, rendesi poi più sensibile la difficoltà di ottenere l'efflusso a bocca piena, e però la portata effettiva non corrisponde sempre alla teorica. Se però il tubo non è troppo divergente, se è formato di materia bagnata dal liquido fluente, e se la velocità di questo non è tanto grande da vincerne l'adesione colle pareti di quello, non sarà difficile l'ottenere un getto pieno e quindi un considerabile aumento di portata. E tanto meglio si riescirà a conseguirlo quanta maggior arte si porrà nell'aprire la bocca del tubo, dopo averne scacciata interamente l'aria atmosferica.

Non desterà però meraviglia se nella ricerca sperimentale della forma più vantaggiosa dei tubi addizionali conici divergenti si riscontrano delle differenze di qualche rilievo.

293. Osserveremo soltanto che allorquando la vena riempie tutta la capacità del tubo addizionale, esplorando la pressione mediante alcune canne barometriche che comunicano colle varie sezioni interne del liquido e pescano in una sottoposta vasca di mercurio, si hanno dei risultati che presso a poco coincidono con quelli che si deducono dalla esposta teoria, la quale perciò rimane bastantemente comprovata.

Ma di tutti questi fatti sperimentali, nonchè delle osservazioni che si riferiscono ai tubi di lunghezza intermedia fra i brevi addizionali e fra quelli che prolungansi oltre 400 volte il diametro dell'orifizio, parleremo altrove con maggiore estensione.

294. Poco eziandio ci è concesso ora di aggiungere sulla resistenza che oppongono nei lunghi tubi le sinuosità, poichè il loro effetto non può essere valutato che sperimentalmente. Ciò soltanto che la teoria ci addita, si è che trattandosi di tali sinuosità, per

cui il fluido scorresse in filamenti formati da linee curve bensì ma continue, non vi sarebbe perdita di forza; poichè la componente della velocità tangenziale che rimane elisa ad ogni istante nel moto curvilineo, è un infinitesimo di second' ordine, laonde la celerità dell' efflusso non rimarrebbe per questo alterata.

Ma quand' anche nelle svolte ciò accada per le molecule che radono le pareti, pure esistono sempre dei filamenti che sono riflessi o dalle pareti stesse o da altre molecule fluide sotto angoli di grandezza finita, cangiando così istantaneamente direzione con perdita notabile di velocità.

È dunque consentaneo alla teoria ciò che ha concluso Dubuat dalle proprie esperienze, cioè che la resistenza delle svolte è proporzionale al quadrato della velocità del fluido, al numero degli angoli di riflessione che il filamento centrale prolungato in linea retta farebbe colle pareti del tubo, ed al quadrato dei loro seni.

Avendo quindi un tubo di uniforme larghezza, per cui scorra il liquido colla velocità costante U, e indicando con $a, a', a''\ldots$ il numero degli angoli eguali di riflessione del filamento centrale, e con $i, i', i''\ldots.$ le respettive loro grandezze, il valore della resistenza sarebbe

$$0{,}0123\,U^2(a\,\text{sen.}^2 i + a'\,\text{sen.}^2 i' + \ldots.)$$

e converrebbe nelle trovate formule all' integrale $\int R\,d'\sigma$, relativo alla resistenza d'attrito, aggiungere anche questi termini che rappresentano l' effetto delle sinuosità.

295. Le formule generali che determinano gli sforzi sostenuti, parallelamente agli assi, dai sistemi di vasi discontinui, serviranno ancora ad assegnarne i valori per i recipienti a cui sono adattati dei tubi o lunghi o corti, sinuosi o rettilinei; purchè alla forza motrice dipendente dalla gravità si aggiungano anche le componenti rettangolari delle resistenze di attrito, e di quelle prodotte dalle svolte, ma prese negativamente.

CAPITOLO XII.

Del moto per gli alvei.

296. Scorra un liquido grave, per un canale scoperto, ossia per un alveo di forma qualsivoglia formato di un fondo e di

sponde di data figura, e alimentato con influsso perenne da un amplissimo recipiente, e si voglia determinare la velocità, e la pressione corrispondente ad una molecula e ad un istante qualunque.

Questo problema dovrebbe essere risoluto generalmente, ritrovando i valori di u, v, w che soddisfanno all'equazione della continuità del §. 150., e determinandone le funzioni arbitrarie dipendentemente dalle condizioni a cui è assoggettata la massa liquida che prendesi ad esame. Questi valori, essendo funzioni di x, y, z e t, converrebbe sostituirli nella equazione delle forze sollecitanti dalla cui integrazione si dedurrebbe la pressione in funzione delle stesse variabili. E ponendo finalmente $d'p=0$ si otterrebbero le equazioni delle superficie tutte di livello; fra le quali è compresa la superficie libera, quando si supponga premuta egualmente in tutta la sua estensione.

297. Se la projezione orizzontale dell'alveo fosse rettilinea, e la sezione trasversale di esso costante, non vi sarebbe ragione (fatta astrazione dalle resistenze) che l'intera massa liquida non si movesse egualmente in piani verticali paralleli all'asse del canale medesimo, e però si potrebbero determinarne le leggi del moto con maggior semplicità riferendola a due soli assi coordinati presi in uno qualunque di codesti piani verticali.

Ma i risultamenti a cui saremmo guidati seguendo questi metodi generali riescirebbero troppo complicati per essere di qualche utilità alla pratica: per cui, riserbandoci ad altro capitolo l'applicazione di essi, ci limiteremo per ora a considerare il moto del liquido siccome lineare, e ridotto a stato permanente, in guisa tale che la velocità media in ciascuna sezione trasversale sia indipendente dal tempo e pochissimo differente in direzione e in intensità da quella onde sono animate le molecule tutte in essa situate.

298. Rappresenti AA' il profilo del pelo d'acqua superiore e BB' il profilo del fondo di un alveo qualunque, ed $m\omega m'$ il filamento che segue la linea direttrice che cominciasi a computare da un punto dato m. Queste tre linee devono essere per ipotesi insensibilmente inclinate tra loro, ed all'orizzontale, altrimenti la teoria che si espone non sarebbe applicabile. Fig. 22

Fatte queste convenzioni si pongano le seguenti denominazioni

Oz Asse verticale delle z.

m Sezione verticale e trasversale della corrente projettata in AB.

ω Simile sezione projettata in $\alpha\beta$.

$D =$ Raggio medio $= \frac{\omega}{\nu}$.

ν Perimetro della sezione ω a contatto coll' alveo.

V ed U Velocità medie in ω ed in m.

V' ed U' velocità in α ed in A.

φ' Angolo pochissimo differente dal retto che la direttrice forma in ω colla verticale.

φ Angolo formato in β dal profilo del fondo colla verticale stessa, il quale angolo differisce pochissimo da φ' e da un angolo retto, sicchè si può ritenere....

$\text{sen.}\varphi = \text{sen.}\varphi'$, prossimamente eguale all' unità.

$B\beta$, $m\omega$, $A\alpha$ pressochè tra loro eguali, si rappresentino respettivamente con s, s', e σ.

$\beta\beta'$, $\omega\omega'$, $\alpha\alpha'$ che sono gli aumenti delle tre linee suddette, si possono ritenere tutti $= ds$; poichè eguagliano la loro comune projezione orizzontale divisa respettivamente per i seni di φ di φ' o di φ'' supposti eguali all' unità.

Ox retta orizzontale.

$\beta\alpha = h$, $L\beta = \zeta$, $L\alpha = z$ rette verticali.

l Larghezza della sezione in α.

L' equazione (4) del §. 173. supponendovi il moto permanente per cui $\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0$, ed applicata alla molecula che scorre alla superficie secondo la linea AA', e fatto $\rho = 1$, si ridurrà alla

$$p = cost. + \int T d'\sigma - \frac{V'^2}{2} \tag{a}$$

ed estendendola da A ad α, nelle quali due situazioni la pressione è costante ed eguale a π, somministrerà

$$\int_0^\sigma T d\sigma - \frac{V'^2 - U'^2}{2} = 0$$

Questa equazione apparterrà alla superficie di livello, e si sarebbe anche ottenuta immediatamente dalla differenziale della (a) supponendovi $d'p = 0$.

299. Per la natura degli alvei in vece di V' ed U' è permesso sostituire la velocità media V ed U delle respettive sezioni, e si avrà

$$(b) \qquad \int_0^\sigma T d\sigma - \frac{V^2 - U^2}{2} = 0$$

Il termine $Td\sigma$ è composto di due parti, la prima si riferisce alla forza acceleratrice di gravità ed è espressa da gdz; la seconda alla resistenza di attrito, la quale come per i tubi si può rappresentare con

$$-gRd\sigma,$$

ponendo

$$R = \frac{\alpha V + \beta V^2}{D}.$$

Differenziando quindi la (b) ed osservando che

$$\zeta = z + h, \quad \text{per cui} \quad dz = d\zeta - dh,$$

e che

$$d\zeta = ds\cos.\varphi, \quad ds = d\sigma$$

si otterrà

$$(A) \qquad VdV = gds\cos\varphi - dh - Rds.$$

Chiamando Q la portata costante, per ciascuna sezione avremo

$$Q = V\omega\text{sen}.\varphi', \quad \text{e} \quad V = \frac{Q}{\omega\text{sen}.\varphi'};$$

e quando sia concesso supporre $\text{sen}.\varphi' = 1$ potrà scriversi semplicemente

$$Q = V\omega, \quad V = \frac{Q}{\omega}$$

da cui

$$dV = -\frac{Qd\omega}{\omega^2}$$

Fatte queste sostituzioni nella (A) essa riducesi alla

$$(B) \qquad \frac{Q^2 d\omega}{\omega^3} = dh - ds(\cos.\varphi - R)$$

dove

$$R = \frac{\alpha V + \beta V^2}{\omega} \nu = \frac{\nu}{\omega}\left(\frac{\alpha Q}{\omega} + \frac{\beta Q^2}{\omega^2}\right).$$

300. In generale ω sarà una funzione di h, è di s, e così pure si dica di φ, onde l' equazione (B) si potrà ridurre a contenere le sole incognite s, ed h e perciò integrandola, si otterrà una relazione fra l' altezza h della corrente, e la lunghezza s del profilo corrispondente del fondo; e così darà a conoscere la natura della curva del profilo del pelo d' acqua a partirsi da una determinata sezione della corrente.

301. Quando le sezioni trasversali dell' alveo sono tutte eguali, le corrispondenti sezioni della corrente saranno funzioni della sola h; e la differenza fra due sezioni vicinissime, ω ed $\omega + d\omega$, una di altezza h, l' altra di altezza $h + dh$, eguaglierà un rettangolo avente per base la larghezza superiore l dell' alveo, e per altezza dh, onde si porrà

$$d\omega = l dh.$$

La (B) convertesi in conseguenza nella

$$(C) \qquad dh = \frac{ds(R - \cos.\varphi)}{\frac{Q^2 l}{g\omega^3} - 1} = \frac{ds\,(R - \cos.\varphi)}{\frac{l}{\omega}\,\frac{V^2}{g} - 1}.$$

302. Se poi le sezioni dell' alveo oltre essere tutte eguali fossero anche rettangole, si avrebbe

$$\omega = lh, \quad \nu = l + 2h$$

onde

$$R = \frac{\alpha V + \beta V^2}{lh}\,(l + 2h) = \frac{l + 2h}{lh}\left(\frac{\alpha Q}{lh} + \frac{\beta Q^2}{l^2 h^2}\right)$$

E quando l' altezza h del liquido è molto piccola in confronto della larghezza l dell' alveo, si avrà prossimamente $\frac{l + 2h}{lh}$ eguale ad h, e però

$$(D) \qquad R = \frac{\alpha V + \beta V^2}{h} = \frac{1}{lh^2}\left(\alpha Q + \frac{\beta Q^2}{lh}\right).$$

Quest' ultimo valore di R può convenirgli qualunque sia la figura delle sezioni trasversali del canale, purchè sia molto più largo che profondo.

303. Se si suppone l'inclinazione φ del fondo costante, sostituendo nella (C) per ω il valore lh, e per R l'espressione (D), si ottiene una equazione a due variabili integrabile sotto forma finita, la discussione della quale è ampiamente sviluppata nelle Note ed Aggiunte del Prof. Masetti alla Idraulica dell' esimio Venturoli e nelle Ricerche idrometriche fatte dalla scuola degli Ingegneri Pontificj e pubblicate in Roma l'anno 1823. Essa può dare un' idea della curva che dovrebbe avere il pelo d'acqua di una corrente che si muovesse per un canale rettilineo a sezione rettangolare di una pendenza costante, e soggetta alle resistenze uniformi di attrito, che ne rendessero il moto permanente.

Ma in generale la pendenza costante e la regolarità dell'alveo non si estendono che per breve lunghezza, e però conviene tracciare la curva del pelo d'acqua per punti, servendosi dell' equazioni (C), considerandovi dh e ds quali differenze finite e ritenendo nello spazio per cui si dilunga quest'ultima, la sezione ω, l, e $\cos.\varphi$ siccome costanti.

304. Quando altrove avremo occasione di parlare dei rigurgiti, e delle chiamate dello sbocco, ci dovremmo servire di queste formule per determinare la natura della curva in cui si dispone il pelo d' acqua in vicinanza di esse allorchè il moto è ridotto a stato permanente. Ed invero tanto nell' uno che nell' altro caso avviene che la corrente in una determinata posizione deve disporsi in tal guisa che la sua sezione trasversale sia diversa da quella che le converrebbe indipendentemente da queste circostanze locali. Si comincerà dunque da una tale sezione forzata a costruire la curva del pelo d' acqua mediante le stabilite equazioni; e così si conoscerà la relazione che passa tra la curva relativa al corso naturale e permanente del fiume, e quella in cui deve disporsi la sua superficie, o per cateratte o per altre opere che ne diminuiscono le sezioni, o perchè sbocca in altro recipiente in cui l' acqua si trova a un differente livello.

Vedremo però che le osservazioni che si sono raccolte dall' esperienza non sono per questo lato abbastanza conformi ai resultati delle esposte teorie per poter sopra di queste serbare una intera fiducia.

Ciò poi non deve recar meraviglia riflettendo che il fondamento sù cui abbiamo basati i nostri calcoli era l'ipotesi del moto lineare, la quale è ben lungi dal verificarsi, quando hanno luogo dei considerabili rialzamenti artificiali del pelo della corrente, o dei forti abbassamenti in prossimità dello sbocco in un basso recipiente.

Calando infatti a cagione d'esempio una cateratta che chiudesse da ripa a ripa il canale e lasciasse libera soltanto una determinata apertura, ridotto il moto permanente, l'acqua dovrà rialzarsi anteriormente alla cattarata, e abbassarsi inferiormente in guisa che la velocità per l'apertura tale si renda da far passare tanto liquido quanto ne passerebbe per una sezione naturale della corrente; stabilita questa altezza l'acqua superiore sembra come sovrapposta alla corrente che passa per la sezione ristretta, senza parteciparne al movimento, quindi mal si apporrebbe colui che volesse risguardare il moto di tutta la massa siccome lineare.

Vi sarebbe pari incompatibilità ad applicare l'ipotesi suddetta al moto in prossimità della chiamata dello sbocco; perchè gli strati superiori della corrente si inflettono descrivendo linee curve con velocità ognor crescente mentre gli strati più vicini al fondo sembra che meno modifichino il loro corso naturale.

305. Accade sovente nei tratti regolari de' fiumi di poca cadenza, che il moto della corrente oltre essere permanente è anche uniforme, cioè che la velocità non varia da sezione a sezione, nè da istante ad istante; egli è evidente che ciò avrà luogo quando tutte le sezioni della corrente siano eguali, e però il pelo d'acqua risulti parallelo al profilo del fondo.

A una tale condizione soddisfasi ponendo $dh = 0$ ossia

$$gR = g\cos.\varphi.$$

Questa ultima che ci addita che l'inclinazione del fondo deve essere tale che le resistenze uniformi distruggano continuamente la forza acceleratrice della gravità può anche scriversi

$$(E') \qquad (\alpha V + \beta V^2)\frac{\nu}{\omega} = \left(\alpha\frac{Q}{\omega} + \frac{\beta Q^2}{\omega^2}\right)\frac{\nu}{\omega} = \cos.\varphi$$

avvertendo al valore di R ed alla

$$(F) \qquad Q = V\omega.$$

La (E) e la (F) possono servire alla risoluzione di molti interessanti problemi d' Idrometria, assegnando il valore di due fra le quantità

$$\varphi,\ \nu,\ \omega,\ V,\ Q$$

date che siano le altre tre.

306. Quando l' alveo è molto largo in confronto della profondità abbiamo veduto che prossimamente si può porre

$$\omega = hl, \text{ e } \nu = l$$

e però esse diventano

$$(E') \qquad h\cos.\varphi = \alpha V + \beta V^2 = \left(\frac{\alpha Q}{hl} + \frac{\beta Q^2}{h^2 l^2}\right)$$

$$(D') \qquad Q = Vhl.$$

307. Se la sezione è un trapezio di cui b rappresenti la base corrispondente alla larghezza del fondo dell' alveo, h l' altezza, e $2nh$ la differenza fra il lato superiore opposto e parallelo alla base e la base stessa, avremo

$$\omega = bh + nh^2$$

$$\nu = b + 2h\sqrt{1 + n^2}$$

e quindi la (E) somministra

$$(G) \qquad [\alpha Q(bh + nh^2) + \beta Q^2][b + 2h\sqrt{1 + n^2}] = \cos.\varphi(bh + nh^2)$$

equazione di sesto grado rapporto ad h mediante la quale si potrà risolvere l' interessantissimo problema di assegnare l' alzamento del pelo d' acqua in un fiume di corso equabile aumentandone la portata in un dato rapporto.

Potrebbe analogamente essere risoluto lo stesso problema qualunque fosse la figura della sezione purchè essa si esprima per l' altezza h.

Ci basti pertanto di avere per ora stabilite queste formule generali di cui si vedrà a suo luogo quanto importanti e varie siano le applicazioni.

CAPITOLO XIII.

Dell' urto di una vena fluida.

308. Scaturisca da una piccola luce n a piano verticale, e scevra da contrazione una vena fluida di densità ρ, e con velocità $U=\sqrt{2g\zeta}$, e vada a percuotere normalmente una superficie piana mobile con velocità W nel senso stesso del getto. Supponendo $W<U$, la perdita di velocità che proverebbe la vena fluida sarebbe eguale ad $U-W$, e però, ripetendo le considerazioni del §. 235. saremmo condotti all' espressione

$$\rho n(U-W)U$$

per la misura dell' urto diretto sofferto dalla data superficie.

Quando poi la superficie urtata fosse ferma, questa misura riducesi alla seguente

$$(1) \qquad \rho n U^2 = 2\rho g\zeta n$$

Da cui rilevasi che l' urto diretto di una vena fluida contro un piano immobile che le tolga tutta la velocità ad esso normale, eguaglia il peso di un prisma liquido avente per base la sezione della vena e per altezza il doppio di quella cui è dovuta la velocità della vena urtante.

Quando il piano urtato sia di area $N<n$ la misura dell' urto diverrà

$$(2) \qquad \rho N U^2 = 2\rho g\zeta N.$$

Se ben si osserva il valore della percossa diretta, rappresentata dalla (1), e si confronti coi risultati ottenuti al §. 210. si vedrà che è precisamente eguale in intensità alla forza di reazione che risente il recipiente in senso opposto alla direzione del getto.

L' esposta teoria dovuta al Newton suppone che il piano urtato abbia sufficiente estensione perchè i filamenti della vena fluida che lo incontrano perdano contro di esso tutta la propria velocità normale; quindi è facile immaginare che allorquando ciò non accada l' urto deve riescire minore. Al contrario invece succederà se la vena dopo l' urto è obbligata da un bordo sporgente che contorna il piano urtato a prendere una direzione che formi angolo ottuso coll' asse della vena.

309. Di tutto questo rende plausibile ragione la seguente teoria fondata sui principj generali di idrodinamica.

Si consideri la vena urtante, contro una superficie simmetrica Fig. 23 attorno l' asse della vena stessa, siccome composta di un fascio di filamenti fluidi i quali giunti in prossimità della superficie si inflettono descrivendo linee convesse verso l' asse, e intorno ad esso simmetriche, e strisciando lungo una conoide liquida che rimane ferma contro la superficie stessa. Rappresenti la figura una sezione per l' asse di questa conoide *abb* e di due filamenti diametralmente opposti *nm' nm'*.

Ridotto il moto a stato permanente e prendendo l'asse della vena per asse delle x la somma degli sforzi che tutti questi filamenti sopportano nel senso dell' asse sarebbe dato dalla formula seguente dedotta dalle (15) del §. 182.

$$\Sigma . F\cos . fx = \Sigma . \int X d\mu - \rho \Sigma . dn^2 U^2 \left(\frac{\cos . A'}{dm'} - \frac{\cos . A}{dn} \right)$$

in cui *dn* e la sezione trasversale dei filamenti nella luce *n* dove sortono paralleli all' asse e dove $\cos . A = 1$; e *dm'* è la sezione dei filamenti ove abbandonano la superficie urtata, formando un angolo *A'* coll' asse della vena, che può essere qualunque.

Questo sforzo prendesi per la misura dell' urto *R* sostenuto dalla superficie opposta alla vena.

310. Dipendentemente dai valori che si attribuiscono agli angoli *A A'* ed alle sezioni *dm'* e *dn*, codesto sforzo può essere positivo, zero, o negativo. Ma lasciando anche a parte quest' ultimo caso che corrisponde a pressioni negative e quindi a getto discontinuo, sembra che cogli altri dar si possa una qualche ragione del singolarissimo fenomeno della specie di succhiamento che accade, di un disco opposto direttamente all' urto di una vena fluida che esce velocemente da un foro praticato nel centro di un altro disco. Infatti basta supporre che la prossimità di questi due dischi obblighi, nello spazio tra essi compreso, i filamenti fluidi a prendere tale figura che il rapporto che ne deriva fra *dm'*, e *dn* renda questo sforzo minore della pressione posteriore sof-

ferta dal disco opposto all' urto, per quanto piccola questa possa immaginarsi.

311. Ma quando si supponga che i filamenti fluidi abbandonino la superficie urtata con la stessa velocità U conviene che le bocche dm' dei medesimi eguaglino la loro sezione dn corrispondente all' orifizio. Quindi annullandosi, il termine $\int Xd\mu$ se la vena è ad asse orizzontale si avrà semplicemente

$$R = -\rho U^2 \Sigma . dn(\cos . A' - 1)$$

ossia

$$R = \rho U^2 n(1 - \cos . A').$$

Quando la superficie urtata è piana, e i filamenti sortono parallelamente ad essa si porrà

$$\cos . A' = 0$$

laonde

$$R = \rho U^2 n = 2\rho g\zeta$$

come dalla precedente Teoria Newtoniana.

Se la superficie urtata è piana e poco estesa, oppure convessa verso il getto sicchè i filamenti, nell' abbandonarla, formino coll' asse l' angolo acuto ψ, sarà

$$R = \rho U^2 n(1 - \cos . \psi).$$

Se invece la superficie urtata fosse piana e con un bordo rivolto verso la luce, oppure concava in guisa che i filamenti fossero costretti a ripiegarsi formando alla loro sortita un angolo ottuso $90 + \psi$ coll' asse della vena, si avrebbe

$$R = \rho U^2 n(1 + \operatorname{sen} \psi)$$

quantità che può divenire doppia del primo valore di R quando $\psi = 90°$; cioè quando i filamenti sono obbligati a retrocedere in direzione opposta all' urto.

Alcune esperienze del Morosi vanno pienamente d' accordo con questi risultati.

312. Venendo ora a parlare degli urti obliqui mostreremo da prima in qual modo si calcolano colla teoria Newtoniana sebbene l' esperienza non verifichi le conseguenze che da essa si deducono.

Formi il piano urtato da tutta la vena di sezione n un angolo ψ colla direzione della vena medesima la cui velocità decompongasi nelle due $U\cos.\psi$, $U\mathrm{sen}.\psi$ parallela la prima, normale l' altra al piano dato. Quella non produce urto mentre questa rimanendo elisa dalla opposta superficie, sarà la sola che servirà a calcolare lo sforzo normale della massa urtante $\rho nUdt$ che però sarà espresso da $\rho U^2 n\mathrm{sen}.\psi$; e volendo la componente di questo sforzo parallelamente alla direzione del getto si troverà rappresentata da

$$\rho nU^2\mathrm{sen}.^2\psi.$$

Con queste formule, considerando le superficie curve siccome poliedriche di infinite faccie, si potrebbe calcolare l' urto contro una superficie curva qualsivoglia opposta all' urto di una vena fluida; e per facilitare una tale ricerca si osservi che essendo N l' area del piano obliquo percosso in tutta la sua estensione da una vena di sezione n si avrà

$$n = N\mathrm{sen}.\psi$$

perchè n sarà la projezione ortogonale di N; e quindi l' urto normale diverrà

$$\rho NU^2\mathrm{sen}.^2\psi$$

e la componente di esso parallela al moto

$$\rho NU^2\mathrm{sen}.^3\psi.$$

313. Si trova un' analoga espressione dell' urto obliquo considerando la vena qual fù descritta al §. 309 e siccome composta di un fascio di filamenti che abbandonino il piano urtato con direzioni ad esso parallele, e con velocità eguali tra loro, ed a quella della vena urtante. Infatti prendendo a considerare due filamenti qualsivogliano, diametralmente opposti, cioè esistenti in piani che passino per l' asse della vena, è certo che se uno forma allo sbocco un angolo θ colla direzione della vena, l' altro dovrà formarlo colla direzione stessa di $180^\circ - \theta$. E però se lo sforzo dovuto al primo filamento nel senso dell' asse è

$$\rho dnU^2(1 - \cos.\theta)$$

pel secondo sarà

$$\rho dn U^2(1 + \cos.\theta)$$

Dunque prendendo la somma totale degli sforzi sostenuti da tutti i filamenti si otterrà per espressione $\rho n U^2$, e lo sforzo esercitato da tutta la vena perpendicolarmente al piano sarà

$$\rho n U^2 \text{sen}.\psi$$

come sopra.

314. Chiamasi indefinito un fluido contenuto in un canale o in un recipiente di dimensioni amplissime in confronto di quelle dei corpi che in esso si immergono.

Se si suppone il fluido animato dalla velocità equabile U, e si muova con esso un prisma totalmente immerso, e coll' asse orizzontale situato nella direzione del moto, è evidente che le superficie di questo prisma proveranno tutto all'intorno delle pressioni le cui componenti orizzontali si distruggeranno nella stessa guisa come se tutto il sistema fosse immobile (66) e però in virtù di queste pressioni cui daremo il nome di Idrostatiche non avrà luogo verun urto o eccesso di pressione della massa fluida contro il corpo immerso.

Ma se si immagina che il liquido, sia bensì in moto nel senso dell' asse del prisma immerso, ma che questo resti fermo ed esposto all' urto della corrente, i filamenti fluidi che dovrebbero passare per lo spazio da esso occupato, cominciano a ripiegarsi un poco prima di incontrarlo, e lasciano tra essi e la base anteriore del solido una piccola *prora* fluida, lo lambiscono quindi lateralmente, poscia si ricongiungono dietro la base posteriore comprendendo una *prora* fluida e formando secondo Poncelet de' moti vorticosi successivamente in alterne direzioni, i quali moti vanno via via allargandosi, e finiscono per perdersi interamente.

315. Qualunque, però siano le figure dei filamenti percorsi, se P rappresenta la pressione idrostatica corrispondente alla sezione dn di uno di essi presa nella situazione ove cominciano ad inflettersi anteriormente all' incontro del prisma e dove hanno la comune velocità U della corrente, supponendo ridotto il moto a stato permanente, la pressione per un' altra sezione $d\omega$ del filamento medesimo sarà espressa da

$$\frac{p}{\rho} = \frac{P}{\rho} - \frac{U^2}{2g}\left(\frac{d\omega^2}{dn^2} - 1\right).$$

Prendendo quindi la risultante di tutte le pressioni esercitate dai varii filamenti fluidi contro gli elementi superficiali della prora e poppa fluida e del corpo immerso, per ottenere la misura dello sforzo sostenuto da questo nel senso del moto, evidentemente si avrà un risultato avente per fattore comune U^2; imperocchè la pressione idrostatica P che è quella che avrebbe luogo anche supponendo il sistema in quiete, produce delle componenti orizzontali, che esercitandosi tutte intorno al solido si distruggono scambievolmente.

316. Quello che si dice del prisma, si può ripetere di un corpo immerso di qualsiasi altra forma; e se si ammette che per più corpi solidi simili le figure formate dai filamenti svolti dalla loro primiera direzione sieno simili, è permesso concluderne che lo sforzo che esercita un fluido, indefinito contro un corpo totalmente immerso, sia primieramente proporzionale ad U^2, e che per i corpi simili sia proporzionale al quadrato delle loro dimensioni omologhe.

Si è dunque convenuto di rappresentare codesto sforzo R nel modo seguente

$$R = \gamma(m + m')N\zeta$$

ponendo $\gamma =$ peso specifico del fluido, $N =$ massima sezione trasversale del corpo immerso; e indicando con m ed m' due coefficienti numerici da determinarsi coll' esperienza, variabili per i corpi di forma diversa; e relativi, il primo alla figura che prendono i filamenti fluidi anteriormente alla massima sezione N, e corrispondente l' altro alla figura che assumono inferiormente.

317. La forma di questa espressione che rappresenta l' urto di una massa fluida indefinita contro un solido fermo in essa immerso, vale anche pel caso in cui il corpo si muova nel fluido in quiete; ma secondo alcune poche esperienze pare che i coefficienti numerici m ed m' debbano in quest' ultimo caso soffrire una leggiera variazione.

318. Alcune modificazioni necessarie a farsi alle precedenti conclusioni sono in parte dipendenti dall' adesione delle molecule fluide tra loro che è tanto più sensibile quanto è minore la velocità, ed in parte dall' elasticità del fluido che varia al variar della pressione.

Ma quello che può indurre nella trovata misura dell' urto una differenza di molto rilievo si è la distanza del corpo urtato alla superficie della corrente; imperocchè se questo invece di essere totalmente immerso rimanesse in parte sporgente, il fluido si rialza dalla parte anteriore e si abbassa dalla posteriore di esso dando luogo così ad un eccesso di pressione idrostatica nel senso del moto che accresce l' intensità dello sforzo. Di più i filamenti fluidi che lambendo le superficie laterali del corpo si abbassano dalla parte posteriore, acquistano una maggiore velocità che può rendere ivi la pressione di gran lunga minore di quella che ha luogo sul davanti.

Ma di tutte queste circostanze dell'urto, come pure della misura della resistenza in canali angusti, meglio sarà riceverne lume dall' esperienza anzichè pretendere di darne teoriche spiegazioni partendosi da dati troppo vaghi ed ipotetici.

CAPITOLO XIV.

Del moto di un fluido elastico per un vaso continuo.

319. Abbiasi un fluido elastico mobile comunque per tubi di grossezza infinitesima, o di moto lineare per vasi di grandezza finita. Tenute le denominazioni del Cap. II. varranno in generale le seguenti equazioni

$$\omega\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d.\rho V\omega}{d\sigma}\right)=0 \tag{1}$$

$$\frac{dp}{\rho}=Td\sigma-VdV-\left(\frac{dV}{dt}\right)d\sigma \tag{2}$$

e poichè si ha $p=h\rho$ essendo §. (101.)

$$h=\frac{\varpi}{D}(1+\alpha\theta) \tag{3}$$

la (2) potrà integrarsi, e somministrerà

$$h\log.p=cost.+\int Td\sigma-\frac{V^2}{2}-\int\left(\frac{dV}{dt}\right)d\sigma \tag{4}$$

Supponiamo che il moto sia ridotto permanente sicchè la densità ρ, è la velocità V non variino col tempo; in tale ipotesi le tre soprascritte equazioni si riducono alle seguenti

$$\rho V\omega = \frac{\pi}{h} Wm = \frac{\pi'}{h} W'm' = cost. \tag{5}$$

$$\frac{dp}{\rho} = Td\sigma - VdV \tag{6}$$

$$h\log.p = C + \int Td\sigma - \frac{V^2}{2} \tag{7}$$

nelle quali potrà annullarsi il termine $\int Td\sigma$ quando si faccia astrazione dalle forze acceleratrici onde il fluido è animato.

320. Moltiplicando la (6) per la quantità costante $\rho V\omega dt = \rho\omega d\sigma$ ed integrando da un estremo all' altro della direttrice si avrà

$$\int_s^{s'} \omega d\sigma = \int_s^{s'} T\rho\omega d\sigma.d\sigma + \frac{\pi}{h} mds \frac{W^2}{2} - \frac{\pi'}{h} m'ds' \frac{W'^2}{2} \tag{8}$$

la quale equazione racchiude in se la dimostrazione del principio delle forze vive.

Imperocchè essendo $\omega d\sigma$ l' elemento di volume che passa nel tempo dt per la sezione ω, $dp\omega d\sigma = (p + dp - p)\omega d\sigma$ rappresenta la differenza dei momenti virtuali delle pressioni opposte p e $p + dp$ che si esercitano contro le sue faccie normali alla direttrice; e però $\int_s^{s'} dp.\omega d\sigma$ altro non è che la somma dei momenti virtuali di tutte le pressioni che hanno luogo sulle faccie opposte degli strati fluidi componenti la massa data.

Dunque potremo enunciare la trovata equazione nel modo seguente.

La somma dei momenti virtuali delle pressioni che si esercitano nelle faccie degli strati onde immaginasi composta la massa fluida, più la somma dei momenti virtuali di tutte le forze motrici che animano gli strati medesimi, eguaglia la semisomma della variazione di forza viva che subisce il sistema nel tempo dt; la quale variazione, essendo il moto permanente, si riduce soltanto al cangiamento di velocità avvenuto negli strati estremi.

321. Facciamo pertanto astrazione dalle forze sollecitanti, e ammettiamo per ipotesi che le pressioni π' e π rimangano costanti per tutto il tempo dell' efflusso dall' infima sezione n del vaso che

terremo coincidente coll' estrema m' del fluido. Ciò equivale a supporre che superiormente ed inferiormente comunichi il vaso con ampii gazometri, in cui le variazioni di densità riescano insensibili.

Ritengasi inoltre la temperatura costante per tutto l'interno del recipiente, altrimenti la h non potrebbe considerarsi costante nell' effettuate integrazioni.

Posto ciò la (7) estesa dall' arco s fino all' arco σ della direttrice somministra

$$h \log.\frac{p}{\pi} = \frac{W^2 - V^2}{2} \tag{9}$$

ed estesa per tutta la direttrice

$$h \log.\frac{\pi'}{\pi} = \frac{W^2 - U^2}{2} \tag{10}$$

Osservando poi che

$$\pi W m = \pi' U n = p V n$$

queste diverranno

$$h \log.\frac{p}{\pi} = \frac{\pi'^2 U^2 n^2}{2}\left(\frac{1}{\pi^2 m^2} - \frac{1}{p^2 \omega^2}\right) \tag{11}$$

$$h \log.\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\pi'^2 U^2 n^2}{2}\left(\frac{1}{\pi^2 m^2} - \frac{1}{\pi'^2 n^2}\right) \tag{12}$$

Da quest' ultima si trae

$$U = \sqrt{\frac{2h \log.\frac{\pi'}{\pi}}{\left(\frac{\pi m}{\pi' n}\right)^2 - 1}} \tag{13}$$

che è la velocità dell' effiusso.

Dividendo la (11) per la (12) si eliminerà la U, e si otterrà la seguente equazione che servirà a determinare la pressione in una sezione qualunque

$$\frac{\log.\frac{p}{\pi}}{\log.\frac{\pi'}{\pi}} = \frac{\frac{1}{\pi^2 m^2} - \frac{1}{p^2 \omega^2}}{\frac{1}{\pi^2 m^2} - \frac{1}{\pi'^2 n^2}} = \frac{1 - \left(\frac{\pi m}{p \omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\pi m}{\pi' n}\right)^2} \tag{14}$$

Per ottenere la quantità di fluido q uscito nell' unità di tempo dalla sezione n colla densità $\frac{\pi'}{h}$, basta moltiplicare questa densità per nU, e si otterrà

$$q=\frac{\pi'}{h}nU \tag{15}$$

E volendo trovare il volume L che occuperebbe questa massa nel serbatojo che aveva la densità $\frac{\pi}{h}$, per la legge di Mariotte si esprimerebbe con

$$\frac{\pi'}{\pi}nU=L. \tag{16}$$

322. Se la frazione n è un orifizio piccolissimo in tal guisa foggiato che per esso sgorghi il fluido in direzione parallela alla direttrice, trascurando il termine $\left(\frac{\pi' n}{\pi m}\right)^2$ in confronto dell' unità si otterrà semplicemente

$$U=\sqrt{2h\log.\frac{\pi}{\pi'}} \tag{17}$$

$$\frac{\log.\frac{p}{\pi}}{\log.\frac{\pi'}{\pi}}=\pi'^2n^2\left(\frac{1}{p^2\omega^2}-\frac{1}{\pi^2m^2}\right) \tag{18}$$

per le sezioni ω comparabili con m; e per una sezione ω comparabile con n

$$\frac{\log.\frac{p}{\pi}}{\log.\frac{\pi'}{\pi}}=\frac{\pi'^2n^2}{p^2\omega^2}; \tag{19}$$

$$q=\frac{\pi'}{h}n\sqrt{2h\log.\frac{\pi}{\pi'}}; \tag{20}$$

$$L=\frac{\pi'}{\pi}n\sqrt{2h\log.\frac{\pi}{\pi'}}. \tag{21}$$

Se l' orifizio è praticato in lastra sottile sicchè abbia luogo la contrazione converrà in luogo della luce n sostituire in tutte queste formule la εn, che è la sezione della vena contratta, ed il coefficiente ε varierà tra i valori 0,60 e 0,61.

323. Se il serbatojo o gazometro che somministra il fluido elastico al dato recipiente non fosse inesausto, la sua densità $\frac{\pi}{h}$ non sarebbe più costante, e però anche la densità ρ e la velocità V di uno strato qualunque diverrebbero variabili col tempo; quindi a tutto rigore non valerebbero le formule stabilite, in cui abbiamo supposto $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)=0$, $\left(\frac{dV}{dt}\right)=0$.

Quando però si tratti di un ampio recipiente prismatico per cui $\omega=m$, e che si vuota per un piccolissimo foro n, i termini $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ e $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ sono piccolissimi, e però potendosi per un breve istante considerare il moto permanente, la (18) rappresenterà con sufficiente esattezza la pressione in una qualunque sezione. Ma allorchè vi si pone $\omega=m$ evidentemente si soddisfa all'equazione medesima col valore di $p=\pi$; e un tale risultato ci rende palese che per un dato istante la pressione in tutte le eguali sezioni del recipiente è quella stessa del gazometro superiore. Nello stesso modo si può anche ritenere senza tema di grave errore che la velocità dell'efflusso sia somministrata dalla (17).

Ammesse queste ipotesi e detto R il volume del gazometro unitamente al recipiente, e $\frac{d\pi}{h}$ la differenza di densità che in esso ha luogo nel tempuscolo dt si avrà

$$\text{(22)} \qquad \frac{R.d\pi}{h}=\frac{\pi'}{h}\,n\,dt\sqrt{2h\log.\frac{\pi}{\pi'}}$$

con che si viene ad eguagliare la massa fluida escita nel tempo dt dall'orifizio n alla massa diminuita nel gazometro superiore e nel recipiente. Si otterrà quindi

$$\text{(23)} \qquad t=\frac{R}{\pi n\sqrt{h}}\int_{\pi}^{P}\frac{d\pi}{\sqrt{\log.\frac{\pi}{\pi'}}}$$

per il tempo che impiega il fluido a passare nel recipiente dalla pressione iniziale P alla pressione qualunque π.

324. Se il fluido all'egresso per la luce n si spandesse in un recipiente di limitato volume R', sicchè ivi la pressione π' non potesse considerarsi costante, ma bensì crescente all'aumentarsi del tempo, indicando con P' il valore iniziale di questa pressione, per causa dell'invariabilità della massa contenuta nella capacità di tutti i recipienti, si avrebbe l'equazione

$$RP + R'P' = R\pi + R'\pi'$$

da cui si trarrebbe il valore di π' da sostituirsi nella (22); per cui si avrà il tempo t espresso da

$$(24)\quad t = \frac{RR'}{n\sqrt{2h}}\int_{\pi}^{P} \frac{d\pi}{\pi\left[R(P-\pi)+R'P'\right]\sqrt{\log.(R(P-\pi)+R'P')+\log.R'}}$$

325. Se il recipiente da cui sorte il fluido elastico avesse internamente una discontinuità, per cui da una sezione n_1 si passasse immediatamente ad una sezione m_1 di ampiezza maggiore si potrebbe tentare di risolvere il problema dell'efflusso dalla luce n con metodo analogo a quello di cui ci siamo valsi pel moto de' liquidi ne' tubi discontinui. Infatti il fluido nell'escire dalla sezione n_1 animato dalla velocità U_1 va ad occupare una sezione maggiore m_1 ove ha luogo una velocità W_1, e però soffre una perdita di velocità che dà luogo in quest'ultima sezione ad una pressione maggiore di quella che ha luogo in n_1. Indicando quindi la prima pressione in n_1 con B e la pressione in m_1 con B' ed applicando al primo, ed al secondo tronco l'equazione (12) otterremo

$$(25)\qquad \begin{cases} h\log.\dfrac{B}{\pi} = \dfrac{\pi'^2U^2n^2}{2}\left(\dfrac{1}{\pi^2m^2} - \dfrac{1}{B^2n_1^2}\right) \\ h\log.\dfrac{\pi'}{B'} = \dfrac{\pi'^2U^2n^2}{2}\left(\dfrac{1}{B'^2m_1^2} - \dfrac{1}{\pi'^2n^2}\right) \end{cases}$$

Se fosse permesso di considerare l'eccesso di B' sopra B come dovuto alla perdita $U_1 - W_1$ di velocità che soffre la massa $\frac{n_1BU_1dt}{h}$ sortendo dalla sezione n_1, $\frac{n_1BU_1}{m_1h}(U_1 - W_1)$ sarebbe la misura di questa pressione addizionale, e però si avrebbe

$$(26)\qquad B' = B + \frac{n^2\pi'^2U^2}{m_1h}\left(\frac{1}{n_1B} + \frac{1}{m_1B'}\right)$$

mediante la quale unitamente alle (25) si potrebbe eliminare B e B', e ritrovare il valore di U.

Limitandoci però al caso in cui le sezioni n ed n_1 siano piccolissime in confronto di m ed m_1 osserveremo che prossimamente si ha $B' = B$, onde la semplice somma delle (25) ci somministra

$$h \log . \frac{\pi'}{\pi} = \frac{\pi'^2 U^2 n^2}{2} \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} - \frac{1}{\pi'^2 n^2} \right) \qquad \text{da cui}$$

$$(27) \qquad U = \sqrt{\frac{2h \log . \frac{\pi'}{\pi}}{\frac{\pi'^2 n^2}{\pi^2 m^2} - 1}}.$$

326. Si potrebbe ancora colla scorta del Navier risolvere altrimenti lo stesso problema servendoci dell'equazione del principio delle forze vive cioè della (8) a cui si dovrebbe aggiungere il termine $-\frac{\pi'}{h} \frac{nUdt}{2} (U_1 - W_1)^2 = -\frac{\pi' n U^3 dt}{2h} \left(\frac{\pi' n}{B m_1} - \frac{\pi' n}{B' m_1} \right)^2$, che è la metà della forza viva perduta nel passaggio dalla sezione n_1 alla sezione n. Dopo la divisione per la quantità costante $\pi' n U dt$ effettuando l'integrazione si otterrebbe

$$(28) \qquad 2h \log . \frac{\pi}{\pi'} = U^2 \left(1 - \frac{\pi'^2 n^2}{\pi^2 m^2} + \left(\frac{\pi' n}{B n_1} - \frac{\pi' n}{B' m_1} \right)^2 \right)$$

da cui si ricava il valore U espresso per B', e B. Ma poichè si può ancora integrare l'equazione del principio delle forze vive dalla sezione m, alla sezione n_1, poscia dalla m_1 alla sezione n, così si otterranno due equazioni che legano assieme le quantità π, π', B, e B', mediante le quali si potranno assegnare i valori di queste ultime da sostituirsi nella (28) per dedurne l'espressione della velocità dell'efflusso. Il Navier ha tentato di applicare queste formule al caso dell'efflusso per un tubo addizionale annestato ad un gran recipiente, e vedremo a suo luogo che i risultati a cui egli è giunto non sono molto lontani da quelli somministrati dall'esperienza.

327. Seguendo il medesimo illustre autore si potrebbero ancora calcolare le leggi dell'efflusso per i lunghi tubi, facendo nella (7)

Google

$\int T d\sigma = -\int R d\sigma$ e rappresentando con R la resistenza sofferta dal gas nell' interno del tubo; la quale resistenza suole considerarsi espressa da

$$R = \frac{\nu}{\omega} \beta V^2$$

dove ν ed ω hanno i significati del §. (274), e β è un coefficiente da determinarsi coll' esperienza. L' andamento del calcolo sarebbe analogo a quello additato superiormente fuorchè, convenendo calcolare per approssimazione l' integrale

$$\int \frac{\nu}{\omega} \beta V^2 d'\sigma = \int \frac{\nu}{\omega} \beta \frac{\pi'^2 n^2 U^2}{p^2 \omega^2} d'\sigma,$$

questo argomento sembrami più consentaneo a trattarsi nella Meccanica applicata.

CAPITOLO XV.

Della propagazione dell' onde nei fluidi elastici.

328. Consideriamo un fluido elastico ed omogeneo, la pressione e la densità del quale siano per tutto uniformi nello stato di equilibrio; e supponiamo che qualche porzione di esso sia rimossa pochissimo da questa posizione di equilibrio in guisa tale che per tutto il processo del moto le velocità de' suoi differenti punti siano molto piccole, come pure le condensazioni e le dilatazioni che conseguentemente ne derivano. Sarà in tale ipotesi permesso di trascurare i quadrati ed i prodotti di queste quantità, e però le formule generali si renderanno più facilmente integrabili.

Se per maggior semplicità si pone ancora $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, supponendo cioè il fluido non animato da forze acceleratrici, la equazione (H') del §. 156. che vale per un filamento fluido qualsivoglia diverrà

$$(a) \qquad \int \frac{dp}{\rho} = -\int \left(\frac{dV}{dt}\right) ds.$$

329. Sia D la densità costante del fluido nello stato iniziale di equilibrio, corrispondente alla pressione π ed alla temperatura θ; e alla fine del tempo t per il punto qualunque m corrispon-

dente all' arco s del filamento che si considera, si rappresenti la densità per

$$\rho = D(1+\delta),$$

essendo δ una frazione piccolissima positiva o negativa, che esprime nell' un caso una condensazione nell' altro una rarefazione. Quando si supponga che non vi sia perdita assoluta di calorico nel momento in cui ha luogo la condensazione o la rarefazione, detta ε la quantità onde variare dovrebbe la temperatura per produrre questo cangiamento di densità sotto la stessa pressione π, abbiamo trovato §: (112)

$$\delta = \frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha(\theta-\varepsilon)},$$

Se la temperatura fosse rimasta costante, sussisterebbe per la legge di Mariotte, la proporzione seguente

$$p : \pi :: D(1+\delta) : D.$$

Ma poichè realmente varia la temperatura col cangiarsi della densità, così la pressione deve subire un aumento maggiore di quello che risulterebbe dalla stabilita proporzione; per cui si avrà

$$p > \pi(1+\delta)$$

e quindi si potrà supporre

$$p = \pi(1+\delta+\beta\delta) \tag{1}$$

rappresentando con β un coefficiente positivo e indipendente da δ. Avvertendo poi alla $\rho = D(1+\delta)$, si avrà ancora

$$p = \frac{\pi}{D}\rho\left(1+\frac{\beta\delta}{1+\delta}\right) = \frac{\pi}{D}\rho\left(1+\frac{\beta\alpha\varepsilon}{1+\alpha\theta}\right). \tag{2}$$

Osserviamo inoltre che la pressione p può anche esprimersi colla formula

$$p = k\rho(1+\alpha(\theta+\omega))$$

in cui indichiamo per ora con ω la variazione di temperatura che ha luogo nello strato preso in considerazione. Avvertendo quindi che

$$\pi = kD(1+\alpha\theta)$$

essa si ridurrà alla

(3) $$p = \frac{\pi}{D} \rho \left(1 + \frac{\alpha\omega}{1 + \alpha\theta}\right).$$

Dal confronto della (2) colla (3) chiaro ne emerge che $\beta\varepsilon = \omega$ e rammentandoci §. (109) che

$$\gamma = 1 + \frac{\omega}{\varepsilon}$$

se ne dedurrà

$$\beta = \gamma - 1,$$

nelle quali espressioni γ ha il significato che gli si attribuì al paragrafo medesimo.

330. Premesse queste considerazioni generali, e fatte le opportune sostituzioni nella (1), essa riducesi alla

$$p = \pi(1 + \gamma\delta)$$

da cui

$$dp = \gamma\pi d\delta\,;$$

otterremo quindi

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma\pi}{D} \frac{d\delta}{1 + \delta} = \frac{\gamma\pi}{D} \log.(1 + \delta).$$

E quando sia permesso di trascurare le potenze di δ

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma\pi}{D} \delta = a^2\delta$$

dove per brevità si è posto

$$\frac{\gamma\pi}{D} = a^2.$$

La (a) diverrà perciò

$$a^2\delta = -\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$$

da cui

$$a^2\left(\frac{d\delta}{ds}\right) = \left(\frac{dV}{dt}\right).$$

Ponendo $V = \left(\frac{dk}{ds}\right)$, con che si suppone il trinomio

$$udx + vdy + wdz = Vds$$

differenziale esatto, e rappresentando con k una funzione da determinarsi di x, y, z e t, la (a) sarà integrabile, e somministrerà

$$(b) \qquad a^2\delta = -\left(\frac{dk}{dt}\right).$$

Tale è la trasformazione che ha subito l' equazione delle forze sollecitanti.

331. Veniamo ora all' equazione della continuità e vediamo in quali casi si possa ridurre più semplice. Se supponiamo dapprima che il fluido elastico sia contenuto in un tubo cilindrico, si potrà considerare il $d\omega$, cioè la sezione trasversale costante e di qualunque grandezza, onde essa riducesi alla

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \left(\frac{d.\rho V}{ds}\right) = 0$$

e poichè

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = D\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$$

potremo scrivere

$$D\left(\frac{d\delta}{dt}\right) + \rho\left(\frac{dV}{ds}\right) + V\left(\frac{d\rho}{ds}\right) = 0;$$

ponendo D in luogo di ρ, trascurando il prodotto

$$V\left(\frac{d\rho}{ds}\right) = V\left(\frac{d\delta}{ds}\right),$$

e sostituendo in luogo di $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ e di $\left(\frac{dV}{ds}\right)$, $\frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2k}{dt^2}\right)$ e $\left(\frac{d^2k}{ds^2}\right)$ essa si trasforma nella

$$(c) \qquad \left(\frac{d^2k}{dt^2}\right) = a^2\left(\frac{d^2k}{ds^2}\right)$$

equazione della forma di quella delle corde vibranti, e che potrebbe essere integrata con metodo analogo a quello usato nella Meccanica.

332. Ma per mostrare come si possano anche altrimenti dedurne le leggi del moto che si considera, partiremo dal notissimo integrale completo della suddetta equazione (c)

$$k = f(s + at) + F(s - at)$$

in cui f ed F rappresentano due funzioni arbitrarie da determinarsi. Facile sarà quindi il ricavare dalla medesima le espressioni della velocità V e della dilatazione δ che saranno le seguenti

$$V=\left(\frac{dk}{ds}\right)=f'(s+at)+F'(s-at)$$

$$\delta=-\frac{1}{a^2}\left(\frac{dk}{dt}\right)=-\frac{1}{a}f'(s+at)+\frac{1}{a}F'(s-at)$$

333. Supponiamo che soltanto a una piccola porzione di fluido compreso fra Fig. 24

$$s=AB'=-\alpha \text{ ed } s=AB=\alpha$$

sia impresso un moto iniziale; e $V=\psi(s)$, $\delta=\varphi(s)$ siano funzioni arbitrarie date che rappresentino le velocità, e le condensazioni che si attribuiscono a una tale porzione di colonna fluida nel primo istante del moto. È evidente che queste funzioni o continue o discontinue saranno assoggettate alla condizione di essere nulle per tutti i valori compresi fra $s=\alpha$ ed $s=\infty$, e fra $s=-\alpha$ ed $s=-\infty$, e rimarranno cognite ma totalmente arbitrarie e indipendenti fra loro per i valori compresi fra $s=\alpha$ ed $s=-\alpha$.

Ponendo dunque $t=0$ nei trovati valori di V e δ, si dovranno ottenere queste date espressioni, e però si avrà

$$\psi(s)=f'(s)+F'(s)$$
$$a\varphi(s)=F'(s)-f'(s)$$

mediante le quali si determineranno le forme di $f'(s)$, e $F'(s)$ espresse per ψ e per φ. Eseguendo infatti l'eliminazione si ottiene

$$F'(s)=\frac{\psi(s)+a\varphi(s)}{2}$$
$$f'(s)=\frac{\psi(s)-a\varphi(s)}{2}$$

e perciò i valori di V e di δ diverranno

$$V=\frac{1}{2}[\psi(s+at)+\psi(s-at)-a(\varphi(s+at)-\varphi(s-at))]$$

$$\delta=\frac{1}{2a}[a(\varphi(s+at)+\varphi(s-at))-(\psi(s+at)-\psi(s-at))]$$

siccome poi le $\psi(s)$ e $\varphi(s)$ sono nulle per tutti i valori che non sono compresi fra $s=\alpha$ ed $s=-\alpha$, così bisogna concludere che le $\psi(s+at)$, $\psi(s-at)$, $\varphi(s+at)$, $\varphi(s-at)$ saranno nulle per tutti i valori di s compresi tra α e $-\alpha$ quando il tempo t sia tale che renda $at > 2\alpha$; dunque tanto la velocità quanto la condensazione nella porzione BB' soggetta allo spostamento iniziale divengono nulle dopo un tempo $t=\frac{2\alpha}{a}$.

334. Consideriamo un punto M ed un punto M' alla respettive distanze s' e $-s'$ dall'origine A. Il primo punto sarà animato da una velocità, soltanto pel tratto di tempo in cui $s'-at$ sia compreso fra α e $-\alpha$, ed il secondo per l'intervallo in cui $-s'+at$ sia intercetto fra i medesimi limiti. Cominceranno quindi essi a muoversi tostochè sia

$$t=\frac{s'-\alpha}{a}$$

e termineranno quando sia divenuto

$$t=\frac{s'+\alpha}{a}=\frac{s'-\alpha}{a}+\frac{2\alpha}{a}.$$

Da queste considerazioni quindi ne emerge che tanto da una parte quanto dall'altra del punto A si propaga il moto colla velocità costante a, che per ciascun punto della colonna fluida dura per un tempo eguale a $\frac{2\alpha}{a}$, e che si mettono successivamente in moto delle porzioni di colonna fluida di lunghezza 2α animate da velocità, e sottoposte a condensazioni o dilatazioni eguali precisamente a quelle relative allo spostamento iniziale della porzione BB'.

Si dà il nome di onde alle varie porzioni di colonna liquida che successivamente si muovono similmente alla porzione che ha subito lo spostamento iniziale.

335. Siccome l'equazione della continuità è soddisfatta da una serie di funzioni

$$k=f(s+at)+F(s-at)+f_1(s_1+at)+F_1(s_1-at)\dots.$$

computando le rette s. s_1 sull'asse della colonna fluida data, ma partendosi da un'origine qualsivoglia, così si potrà soddisfare con ciascuna coppia di esse a varie condizioni iniziali.

Dipendono queste condizioni dai differenti spostamenti originarj del fluido, corrispondenti ai punti A, A' .... da cui si computano rispettivamente le rette s, s_1.....

La velocità di una molocula qualunque dopo un tempo t essendo rappresentata da $V=\left(\frac{dk}{ds}\right)$ avrà per valore

$$V=f'(s+at)+F'(s-at)+f_1'(s_1+at)\left(\frac{ds_1'}{ds}\right)+F_1'(s_1-at)\left(\frac{ds_1'}{ds}\right)$$

e si vede che sarà la somma delle velocità dovute parzialmente a ciascuno spostamento iniziale.

La condensazione parimente avrà la seguente espressione

$$\delta=-\frac{1}{a^2}\left(\frac{dk}{dt}\right)=-\frac{1}{a}\Big\{f'(s+at)-F'(s-at)+$$
$$f_1'(s_1+at)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)-F_1'(s_1-at)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)\text{ ec.} \ldots\Big\}$$

cioè sarà essa pure eguale alla somma delle condensazioni o dilatazioni parziali dovute a ciascun originario spostamento.

Su queste considerazioni è fondato il principio della coesistenza della propagazione di varj sistemi di onde prodotti da differenti spostamenti iniziali.

336. Supponiamo di prendere soltanto due origini A ed A' distanti fra loro dell' intervallo $AA'=2c>2\alpha$ e immaginiamo che in A ed A' abbiano luogo due eguali spostamenti iniziali per un tratto 2α al di quà e al di là delle origini medesime. Poichè in tal caso si ha $s=2c+s_1$ ossia $s_1=2c-s$ converrà che V e δ rappresentino tali funzioni

$$\psi(s)+\psi(2c-s),\quad \varphi(s)+\varphi(2c-s),$$

che quando $t=0$ siano nulle per tutti i valori non compresi fra $s=\alpha$ ed $s=-\alpha$ e fra $2c-s=\alpha$ e $2c-s=-\alpha$; a queste condizioni soddisfasi ponendo

$$V=\frac{1}{2}\Big(\psi(s+at)+a\psi(s-at)-a(\varphi(s+at)-\varphi(s-at))\Big)-$$
$$\frac{1}{2}\Big(\psi(2c-s+at)+a\psi(2c-s-at)+a(\varphi(2c-s+at)-\varphi(2c-s-at))\Big)$$

$$\delta=\frac{1}{2a}\left\{\begin{array}{l} a(\varphi(s+at)+\varphi(s-at))-(\psi(s+at)-\psi(s-at)) \\ -a(\varphi(2c-s+at)+\varphi(2c-s-at))+ \\ \psi(2c-s+at)-\psi(2c-s-at). \end{array}\right\}$$

337. Prendasi a considerare la velocità di un punto qualunque M compreso fra A ed A', e siano AM, ed $A'M$ maggiori di α. Evidentemente per questo punto essendo $2c-s$, ed s maggiori di α le funzioni

$$\psi(s+at),\quad \varphi(s+at)$$
$$\psi(2c-s+at),\quad \varphi(2c-s+at)$$

saranno nulle.

Quindi per esso punto la velocità sarà espressa semplicemente da

$$V=\frac{1}{2}\Big(\psi(s-at)+\varphi(s-at)\Big)-\frac{1}{2}\Big(\psi(2c-s+at)+\varphi(2c-s-at)\Big)$$

e la dilatazione da

$$\delta=\frac{1}{2a}[a\varphi(s-at)+\psi(s-at)-a\varphi(2c-s-at)-\psi(2c+s-at)]$$

Per $AM=s=c$ risulta sempre, indipendentemente da t, $V=0$, dal che rilevasi che lo strato equidistante ai due spostamenti iniziali ed eguali, rimane sempre immobile. Ma se $AM=s$ è minore di c ma sempre maggiore di α, si vede che allorquando $s-at$ diventa eguale ad α esso comincia a muoversi ed il suo moto dura finchè $s-at$ non supera $-\alpha$.

Dunque comincia a muoversi per $t=\frac{s-\alpha}{a}$, dura il suo moto per un intervallo eguale a $\frac{2\alpha}{a}$ e poi si ferma, e tutto questo dipendentemente dal sistema di onde propagato da A verso A'. Ma quando $2c-s-at$ diventa eguale ad α, cioè passato il tempo $t=\frac{2c-s+\alpha}{2}$ torna esso punto a muoversi dipendentemente dal sistema di onde propagato da A' e dura il suo moto per un altrettanto tempo $\frac{2\alpha}{a}$.

338. Siccome nello strato corrispondente ad $s=c$ abbiamo continuamente $V=0$, così è palese che potrebbe esservi un diaframma immobile, e le condizioni del moto non ne rimarrebbero per questo menomamente alterate. Si deducono quindi dall'esposta teoria le leggi della propagazione delle onde di una colonna

fluida cilindrica verso un piano fisso normale alla loro direzione, e della riflessione di esse operata dal piano medesimo. Il primo moto che abbiamo visto accadere al punto qualunque M deriva dal sistema di onde propagato da A, il secondo dal sistema di onde riflesso dal piano fisso stabilito in D, l'ufficio del quale è analogo a quello che compirebbe un altro sistema di onde eguali propagate da un punto A', talmente situato che AA' fosse doppio di AD.

339. La velocità con cui si propaga il moto dall'origine A lungo la retta indefinita $A\ A'$ abbiamo veduto essere rappresentata da $a=\sqrt{\frac{\gamma\pi}{D}}$.

Se dunque si conosce il rapporto $\frac{\pi}{D}$ fra la pressione π e la densità D del fluido alla data temperatura, e se si misura la velocità della propagazione delle onde per un tubo cilindrico si avrà mezzo di determinare γ; cioè il rapporto fra i calorici specifici a pressione costante e a volume costante del fluido medesimo.

340. Suppongasi per un'altro esempio di avere una massa d'aria estesa per tutti i versi e che le sia comunicato, attorno un punto fisso che prendesi per origine delle coordinate, uno spostamento eguale in tutte le direzioni.

In tale ipotesi le velocità delle molecule situate in superficie sferiche aventi per centro l'origine, saranno tutte eguali e dirette secondo i raggi, e però la velocità V di una molecula qualunque a cui corrisponde un raggio vettore r sarà una funzione di r e t, e così pure si dica della condensazione.

Di più $d\omega$ sarà l'elemento di una superficie sferica di raggio r, e però sarà proporzionale ad r^2, e quindi l'equazione della continuità si trasforma nella

$$r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d.\rho V r^2}{dr}\right)=0$$

che può anche scriversi così

$$r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\frac{2.\rho V}{r^2}+\left(\frac{d.\rho V}{dr}\right)=0$$

la quale con sostituzioni analoghe a quelle operate al §. 331 si converte nella

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)=a^2\left(\frac{2\rho}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)+\left(\frac{d.^2\varphi}{dr^2}\right)\right)=\frac{a^2}{r}\left(\frac{d.^2r\varphi}{dr^2}\right)$$

questa finalmente equivale alla

$$\left(\frac{d.^2r\varphi}{dt^2}\right)=a^2\left(\frac{d.^2r\varphi}{dr^2}\right)$$

il cui integrale completo è

$$r\varphi=f(r+at)+F(r-at).$$

Avremo quindi le seguenti espressioni della velocità e della condensazione

$$V=\frac{1}{r}f'(r+at)+F'(r-at)-\frac{1}{r^2}(f(r+at)+F(r-at))$$

$$\delta=\frac{1}{ar}((F'(r-at)-f'(r+at))$$

e queste funzioni dovranno essere determinate dipendentemente dallo stato iniziale.

Rimetteremo al trattato del Sig. Poisson per ulteriori dettagli su questo argomento il quale, in ciò che risguarda all'applicazione alla Teoria del suono, più alla fisica Matematica che a un corso elementare di Idraulica appartiene.

CAPITOLO VI.

Considerazioni generali sul movimento de' liquidi.

341. Quando si considera il moto dei fluidi per filamenti costituiti da una serie di elementi che vanno ad occupare successivamente gli uni il posto degli altri abbiamo veduto con quanta maggiore facilità si possono integrare le equazioni fondamentali dell' Idrodinamica applicate ai differenti particolari problemi che ci siamo proposti di risolvere.

Ci sia ora concesso di istituire alcune brevi considerazioni generali relative al moto dei liquidi dedotte dalle equazioni che al medesimo si riferiscono.

Si richiami a tale oggetto l'equazione seguente delle forze sollecitanti in cui per semplicità supporremo $\rho=1$

(1) $$p=C+\int Tds-\frac{V^2}{2}\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds;$$

e l'integrazione in essa indicata dovendosi effettuare lungo l'asse del filamento che si considera, la C sarà una funzione del tempo e delle altre quantità considerate costanti nell'integrazione: egli è perciò che questa funzione può essere diversa per clascun filamento. Se a cagion d'esempio $\varphi(x', y', z')=0$ rappresentasse una superficie del liquido a cui facessero capo normalmente tutti i filamenti onde esso è composto, e che ivi fossero note le velocità e le pressioni variabili da punto a punto di una tal superficie, e variabili col tempo, C sarebbe evidentemente una funzione di x', y', z' e t.

Si osservi inoltre che $\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$ potrà ottenersi quando abbiasi $\left(\frac{dV}{dt}\right)=F(s)$; la quale condizione si verifica sempre allorchè si ha.

$$Vds=udx+vdy+wdz=\left(\frac{dK}{ds}\right)ds$$

differenziale esatto di una funzione K di x, y, z, t; poichè in tale supposto diventa $\left(\frac{dV}{dt}\right)=\left(\frac{d^2K}{dtds}\right)$, e quindi $\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds=\left(\frac{dK}{dt}\right)$.

Può essere però che si verifichi la prima condizione, che è la sola necessaria alla possibile integrazione di $\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$, senza che sussista la seconda.

342. L'equazione della continuità trattandosi di liquidi incompressibili riducesi alla

(2) $$\left(\frac{d.Vd\omega}{ds}\right)=0$$

che integrata somministra

$$Vd\omega=\beta$$

in cui la β oltre essere funzione arbitraria del tempo deve, al pari della C, considerarsi funzione delle altre quantità risguardate siccome costanti nell'effettuata parziale integrazione. Potrà dunque essere variabile da filamento a filamento, e la sua forma dipenderà dai diversi valori che acquista il prodotto $Vd\omega$ nelle diverse sezioni dei filamenti corrispondenti alla superficie $\varphi(x', y', z') = 0$.

Chiamando quindi W la velocità che ha luogo nella sezione dm del filamento preso ad esame e situata nella mentovata superficie avremo

$$Vd\omega = Wdm = B.$$

e W sarà una funzione nota ma totalmente arbitraria di x', y', z', e di t.

343. Siccome $d\omega$ è una sezione trasversale di un filamento qualsivoglia, e di figura arbitraria, se si immagina tracciata nell'interno del liquido una superficie che passando per il punto m dalle coordinate x, y, z, tagli normalmente tutti gli assi dei filamenti onde esso fluido è costituito, potrà considerarsi come il differenziale dell'area della superficie medesima; e però indicando con $d\lambda$, $d\lambda'$ due archetti tracciati su di essa, e che formino tra loro angolo retto nel punto m, potremo porre

$$d\omega = d\lambda d\lambda' = rr'd\varepsilon d\varepsilon'$$

in cui $d\omega$, $d\omega'$ ed r, r' sono gli angoli di contingenza e i raggi d'osculo respettivi degli archi suddetti. Posto ciò l'equazione della continuità si ridurrà alla

$$V = \frac{B}{rr'd\varepsilon d\varepsilon'} = \frac{Wdm}{rr'd\varepsilon d\varepsilon'} \tag{3}$$

in queste formule converrà rammentarsi che le superficie di cui $d\omega$, e dm sono gli elementi saranno mutabili di figura col tempo allorquando le linee che costituiscono gli assi dei filamenti non rimangono invariabili per tutto il seguito del movimento.

344. Se il moto del liquido tale si immaginasse che le sue molecule concorressero tutte egualmente ad un punto fisso O, le superficie normali ai filamenti sarebbero sferiche col centro comune in O, e $d\lambda$ $d\lambda'$ potrebbero rappresentare due archetti di circolo massimo tra loro normali, ed appartenenti alla superficie sferica che passa pel punto m, e di raggio $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ Osservando quindi che in tale ipotesi per ciascun filamento il prodotto $d\varepsilon d\varepsilon'$ è costante si potrà scrivere

$$V=\frac{B}{r^2} \tag{4}$$

e però la (1) diverrà

$$p=C+\int T ds-\frac{B^2}{2r^4}+\left(\frac{dB}{dt}\right)\frac{1}{r} \tag{5}$$

Per quanto si è detto la B al pari della β potrebbe essere funzione delle coordinate superficiali x', y' z' e del tempo t; ma per ben comprendere in qual modo essa può essere formata, tenuta l'origine nel punto O, e passando alle coordinate polari si faccia

$$x=r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad y=r\cos\theta\cos\varphi,\quad z=r\operatorname{sen}\theta$$

Poichè l'integrazione parziale della (2) si è fatta nel senso del moto supposto, cioè del raggio r, così la β e quindi la B oltre essere funzioni del tempo lo saranno ancora degli angoli θ e φ, e però la velocità sarà in generale espressa da

$$V=\frac{F(\theta,\varphi)}{r^2}. \tag{6}$$

E veramente è agevole il concepire che immaginando tracciate intorno all'asse delle z tante superficie coniche vicinissime, nello spazio tra esse compreso possono aver luogo tanti differenti moti del liquido concorrenti bensì al vertice comune O ma indipendenti affatto tra di loro. Dividendo inoltre questi spazj mediante un numero qualsivoglia di piani che passano per l'asse si decomporrà la massa liquida in tanti filamenti le cui velocità per lo stesso valore di r possono essere le une dall'altre diverse differendo persino di una quantità finita.

Tutto ciò può accadere mantenendosi la continuità nel fluido e facendo astrazione dalle altre condizioni che risultano dalla sussistenza delle equazioni delle forze sollecitanti, e non è che la fisica interpretazione della forma della funzione $F(\theta,\varphi)$ che per la natura degli integrali delle equazioni a differenziali parziali può essere discontinua, tanto per i diversi valori di θ che corrispondono agli spazj interposti tra le descritte superficie coniche, quanto per i differenti valori di φ che determinano l'inclinazione dei piani che passano per l'asse delle z al piano $x\,y$

345. Nella soluzione del propostoci problema abbiamo supposto che le molecule del liquido concorrano tutte ad un centro comune, ma è evidente che una tal condizione non è necessaria alla continuità dell'intera massa, e però i risultamenti ottenuti non sono dotati di una completa generalità.

E per offrire un esempio fra tanti, di un moto diverso da da quello finora considerato e che soddisfa alla continuità, accennerò soltanto il moto uniforme rotatorio di tutta la massa liquida intorno all'asse di un vaso conico entro cui la massa medesima sia contenuta. In questo caso detta ω la velocità angolare avremo

$$V = \omega\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$u = -\frac{Vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v = \frac{Vx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad w = 0$$

e perciò

$$udx + vdy + wdz = \omega(xdy - ydx)$$

il cui secondo membro non apparisce differenziale esatto. Ciò non ostante potremo determinare compiutamente le leggi di codesto moto rotatorio, e ne abbiamo già insegnato il modo al §. 233.

Se poi la massa liquida oltre avere un moto convergente al vertice del cono rotasse contemporaneamente intorno all'asse del medesimo, si vede che potrebbe avere una specie di moto per filamenti spirali che soddisfarebbe parimente alla condizione della continuità.

Ora perchè fosse realmente completa la soluzione del moto di un liquido entro un vaso conico converrebbe a mio credere che le espressioni delle velocità delle molecule componenti la massa data, e dedotte dall'equazione generale della continuità fossero tali funzioni di x, y, z da rappresentare tutti i possibili movimenti della massa medesima; ma io dubito assai che quelle finora conosciute, non godano per questo rapporto di una assoluta generalità.

Fig. 25 346. Prendiamo ora a considerare un liquido le cui molecule concorrano da tutti i versi egualmente in direzioni normali ad un asse OO', e immaginando tracciata una superficie cilindrica attorno l'asse OO' distante da esso dell'intervallo r, potrebbe assumersi per elemento di una tal superficie il quadrilatero $m'mnn'$, in cui

$$mn = d\lambda = r d\varepsilon\,, \quad mm' = d\lambda' = costante$$

sarebbe perciò

$$V = \frac{B}{r} \tag{7}$$

E l'equazione delle forze sollecitanti che somministra il valore della pressione sarebbe la seguente

$$p = C + \int T ds - \frac{B^2}{2r^2} - \left(\frac{dB}{dt}\right) \mathrm{Log} r. \tag{8}$$

Si potrebbero poi qui rinnuovare tutte le considerazioni che si sono presentate nella risoluzione dell'antecedente problema; ma omettendo una tale ripetizione faremo piuttosto osservare che le (4) e (5) sono le stesse equazioni che l'egregio professor Venturoli ritrovò altrimenti nella memoria sull'efflusso dai vasi conici, e le (7) e (8) coincidono con quelle che il medesimo illustre autore ha registrato nel corso di Idraulica parlando del moto de' liquidi riferito a due coordinate e compreso fra due rette date. Non altro scopo mi sono prefisso nel dedurle da principj diversi, se non se quello di dimostrare come le stabilite formule si prestino con facilità a risolvere i problemi di Idraulica quando per qualche particolar circostanza sia conosciuta preventivamente la natura dei filamenti dal liquido percorsi. Ma allorquando questa è ignota non v'ha dubbio che non si debba ricorrere alle equazioni generali (A'') e (Δ) del Capitolo I. dell'Idrodinamica,

347. Vediamo ora come ciò possa tentarsi, nell'ipotesi di

$$ud'x + vd'y + wd'z = d'k$$

con che però si incomincia a diminuire la generalità del propostoci quesito.

Partendo da una tale supposizione abbiamo veduto che tutta la difficoltà consiste nell'integrare a dovere l'equazione della continuità, che trattandosi di fluidi incompressibili si riduce alla seguente

$$(9)\qquad \left(\frac{d^2k}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2k}{dz^2}\right)=0$$

e allorquando si vogliono determinare le leggi del moto di un velo fluido piano prendendo in questo le coordinate x, y si avrà $w=\left(\frac{dk}{dz}\right)=0$ e la (9) si renderà ancora più semplice diventando

$$(10)\qquad \left(\frac{d^2k}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)=0.$$

348. Fermandoci pel momento a questo ultimo caso osserveremo che l'integrale completo della (10) è

$$(11)\qquad k=\varphi(x+y\sqrt{-1})+\psi(x-y\sqrt{-1})$$

indicando φ, e ψ due funzioni arbitrarie che possono contenere il tempo t in un modo qualunque.

Se con φ' e ψ' si indicano le derivate di queste funzioni si otterrà immediatamente dalla (11)

$$(12)\qquad \begin{cases} u=\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dk}{dx}\right)=\varphi'+\psi' \\ v=\frac{dy}{dt}=\left(\frac{dk}{dy}\right)=\sqrt{-1}(\varphi'-\psi') \end{cases}$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (H) delle forze sollecitanti (§. 153.) essa si trasfosmerà nella

$$(13)\qquad p=C+\int Fd'f-\frac{u^2+v^2}{2}-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$$

La trajettoria descritta da ciascheduna molecula del fluido avrà per equazione differenziale quella che risulta dalla divisiodelle (12) l'una per l'altra cioè

$$(14)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'-\psi'}{\varphi'+\psi'}\sqrt{-1}$$

che può anche scriversi

$$(dx-dy\sqrt{-1})\psi'=(dx+dy\sqrt{-1})\varphi'=0$$

e il cui integrale è

$$(15)\qquad \psi(x-y\sqrt{-1})-\varphi(x+y\sqrt{-1})=\tau$$

essendo τ una funzione arbitraria delle quantità rimaste costanti nella parziale effettuata integrazione.

349. Si sogliono determinare le funzioni φ, e ψ dipendentemente dalla nota forma di φ' e ψ' per alcuni valori particolari delle x, y; noi pure seguendo analoga traccia determineremo direttamente le φ e ψ, valendoci della condizione che certe molecule che si trovano in un istante determinato sopra date curve continuino a scorrere lungo esse per tutto il tempo del moto. Ciò equivale a supporre note *a priori* le trajettorie descritte da alcune serie di molecule del liquido.

Si osservi però che, oltre all'essere tuttavia dubbioso se in tutti i possibili moti si verifichi l'adottata ipotesi di mantenersi sempre le molecule sulle stesse date linee, l'introdurre questa condizione nel problema, fa sì che tutte le altre molecule della massa liquida restano obbligate a percorrere delle linee della stessa specie di quella delle date, vale a dire determinate da equazioni della medesima forma, e che non possono differire che per i varii valori che si attribuiscono alle costanti, ossia ai parametri, in esse contenute.

Gli esempj che qui sotto riportiamo schiariranno meglio quanto si è finora asserito.

350. Debba il velo fluido muoversi entro le due linee piane rapprentate dalle

$$(16)\qquad y=\alpha(x),\qquad y=\beta(x)$$

le quali conterranno il tempo t soltanto nel caso che le linee cui appartengono siano mobili e variabili di figura. Converrà perciò che la (15) si verifichi per le coordinate x ed $\alpha(x)$, e per le x, e $\beta(x)$; laonde essendo indifferente il segno di τ, si avrà

$$(17)\qquad \varphi(x+\alpha\sqrt{-1})-\psi(x-\alpha\sqrt{-1})=\tau$$

$$(18)\qquad \varphi(x+\beta\sqrt{-1})-\psi(x-\beta\sqrt{-1})=\tau$$

Pongasi nella (17) in luogo di x una tal funzione della stessa variabile che renda $x-\alpha\sqrt{-1}$ eguale ad $x-\beta\sqrt{-1}$, mentre poi $x+\alpha\sqrt{-1}$ diventa $x+\alpha'\sqrt{-1}$; essa si trasformerà in conseguenza nella

$$(19)\qquad \varphi(x+\alpha'\sqrt{-1})-\psi(x-\beta\sqrt{-1})=\tau$$

che sottratta dalla (18) sommiaistra

$$\varphi(x+\beta\sqrt{-1})=\varphi(x+\alpha'\sqrt{-1})$$

Se si pone $x+\beta\sqrt{-1}=h$, ed $x+\alpha'\sqrt{-1}=h+\Delta h$, per cui $\Delta h=(\alpha'-\beta)\sqrt{-1}$, si avrà l'equazione a differenze finite

$$\varphi(h)=\varphi(h+\Delta h)$$

il cui integrale ci somministrerà la forma di $\varphi(h)$, ossia in generale di φ.

Con metodo analogo si determinerebbe la forma di ψ, e quindi si conoscerebbe la k con cui si potrebbe procedere alla completa soluzione del problema.

351. Quando il moto del velo fluido debba essere simmetrico intorno ad una retta, assumendola per asse delle x, conviene che cambiando y in $-y$ e viceversa, il valore di k non subisca alterazione; e a una tale condizione si soddisfa ponendo $\varphi=\psi$, e la sola (17) che diventa

$$(20) \qquad \varphi(x+\alpha(x)\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha(x)\sqrt{-1})=\tau$$

basterà a determinare la forma di una tale funzione.

Facciasi a tale oggetto

$$(21) \qquad \begin{cases} x-\alpha(x)\sqrt{-1}=h_{\omega} \\ x+\alpha(x)\sqrt{-1}=h_{(\omega+1)} \end{cases}$$

$$(22) \qquad \begin{cases} \varphi(x-\alpha(x)\sqrt{-1})=\zeta_{\omega} \\ \varphi(x+\alpha(x)\sqrt{-1})=\zeta_{(\omega+1)} \end{cases}$$

e la (20) si trasformerà nella

$$(23) \qquad \zeta_{(\omega+1)}-\zeta_{\omega}=\tau$$

il cui integrale è

$$(24) \qquad \varphi(h_{\omega})=\zeta_{\omega}=C+\tau\omega$$

Eliminando dalle (21) la x si otterrà un equazione a differenze finite costanti fra $h_{(\omega+1)}$ ed h_{ω}, mediante l'integrazione della quale sarà dato il conoscere h_{ω} in funzione di ω, e viceversa; e così sostituendola nella (24) essa ci additerà la forma di φ. Un esempio facilissimo mostrerà l'uso dell'esposto metodo.

352. Sia il velo liquido compreso fra due rette che partano dall'origine e siano egualmente inclinate da una parte e dall'altra dell'asse delle x; sarà quindi $\alpha(x)=ax$; onde le (21) diverranno

$$x-ax\sqrt{-1}=h_\omega$$
$$x+ax\sqrt{-1}=h_{(\omega+1)}$$

che divise l'una per l'altra e posto

$$\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}}=n$$

somministrano

$$nh_\omega-h_{(\omega+1)}=0$$

da cui si trae integrando

$$h_\omega=Cn_\omega, \quad \text{e} \quad \log h_\omega=\log C+\omega\log n$$

sostituendo questo valore di ω nella (21), e raccogliendo nelle due A e B le costanti e le funzioni arbitrarie del tempo introdotte dalle diverse parziali integrazioni, potrà scriversi

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=A+B\log(x+y\sqrt{-1})$$
$$\varphi(x-y\sqrt{-1})=A+B\log(x-y\sqrt{-1})$$

avremo quindi

$$k=2A+B\log(x^2+y^2)$$

da cui

$$u=\left(\frac{dk}{dx}\right)=\frac{2Bx}{x^2+y^2}, \quad v=\left(\frac{dk}{dy}\right)=\frac{2By}{x^2+y^2}$$

$$V=\sqrt{u^2+v^2}=\frac{2B}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$p=C+\int Fd't-\frac{2B^2}{x^2+y^2}-\left(\frac{dB}{dt}\right)\log(x^2+y^2)$$

E queste equazioni coincidono con quelle del §. 346 soltanto che in luogo di B si scriva $\frac{B}{2}$.

353. Se le linee che comprendono il velo fluido fossero le iperbole contenute nell'equazione

$$y=\pm\frac{a^2}{x}$$

le (21) diverrebbero

$$x+\frac{a^2\sqrt{-1}}{x}=h_{(\omega+1)},\quad x-\frac{a^2\sqrt{-1}}{x}=h_{\omega}$$

Per eliminare la x si sommino e poi si sottraggano tra loro, quindi si moltiplichino i due risultati, e si otterrà

$$4a^2\sqrt{-1}=h^2_{(\omega+1)}-h^2_{\omega}$$

ponendo $\qquad h^2_{\omega}=q_{\omega},\quad h^2_{(\omega+1)}=q_{(\omega+1)}$

e $4a^2\sqrt{-1}=A$ la trovata equazione trasformasi nella seguente

$$q_{(\omega+1)}-q_{\omega}=A$$

che ha per integrale

$$h^2_{\omega}=q_{\omega}=A\omega+B$$

e però $\qquad \omega=\frac{h^2_{\omega}-B}{A}$

Sostituendo questo valore nella (24) si avrà

$$\varphi(h_{\omega})=C+\frac{1}{A}(h^2_{\omega}-B)$$

da cui rilevasi la forma di φ.

Raccogliendo infatti tutte le costanti e le funzioni arbitrarie nelle due M ed N, si otterrà

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=M+N(x+y\sqrt{-1})^2$$
$$\varphi(x-y\sqrt{-1})=M+N(x-y\sqrt{-1})^2$$

laonde $\qquad k=2M+2N(x^2-y^2)$

$$u=\left(\frac{dk}{dx}\right)=4Nx,\qquad v=\left(\frac{dk}{dy}\right)=-4Ny$$

$$p=C+\int Fd'f-2\left(\frac{dN}{dt}\right)(x^2-y^2)-8N^2(x^2+y^2)$$

354. Ma veniamo al caso del moto dei liquidi riferito a tre coordinate, per cui, ferma stante l'ipotesi dell'integrabilità del trinomio $ud'x+vd'y+wd'z$, conviene integrare la (9).

Avanti tutto si osservi che la quantità

$$u\frac{d'x}{d's}+v\frac{d'y}{d's}+w\frac{d'z}{d's}=\frac{d'k}{d's}$$

rappresenta la velocità V di una molecula qualunque m decomposta secondo l'archetto $d's$, diagonale del parallelepipedo rettangolo che ha $d'x$, $d'y$, $d'z$ per lati. Se dunque questa componente è nulla, ciò significa che l'archetto $d's$ è normale alla direzione del moto; sicchè tutti i punti per cui abbiasi $d'k = 0$, ossia $k = A$, apparterranno ad una superficie che è incontrata normalmente da tutte le direzioni delle molecule in essa situate.

Quando sarà ottenuto l'integrale della (9) che ci fa conoscere k espresso per x, y, z, t, oltre esserci note le velocità e le pressioni corrispondenti ad una molecula qualsivoglia in un istante qualunque, avremo quindi mezzo di determinare le equazioni di queste superficie che godono della mentovata singolare proprietà.

355. Talvolta accade che conoscendo alcune linee che devono descrivere le molecule del liquido, e conseguentemente le equazioni delle superficie che tagliano normalmente queste e tutte le altre trajettorie della stessa famiglia, si può dedurne con qualche artifizio un valore particolare di k che verificando la (9) soddisfi parimente alla condizione che il liquido scorra tra mezzo e rasente le linee date.

Ma questo metodo è indiretto, e il più delle volte sarebbe difficile l'indovinare come l'equazione della superficie normale entri nella composizione di k. Ciò nulla meno le soluzioni dei due seguenti problemi, dovuta la prima al sullodato Prof. Venturoli, l'altra all'egregio Prof. Giulio di Torino, sembrano suggerite dalle esposte considerazioni.

356. Ecco infatti a quali termini può ridursi il metodo con cui il primo dei citati autori procura di risolvere il problema nel caso in cui il liquido sia obbligato a scorrere per un vaso conico, in tal guisa, che le molecule che si trovano rasenti la superficie interna di esso vaso, convergano tutte al vertice del cono.

Prendasi l'origine in questo vertice, e detta r la distanza di una molecula qualunque situata sopra la superficie conica interna a corrispondente alle coordinate x, y, z si avrà

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

e se si chiama V la velocità della molecula medesima diretta secondo il raggio r, le sue componenti saranno espresse ordinatamente dalle tre seguenti

$$(\alpha) \qquad u=\left(\frac{dk}{dx}\right)=\frac{Vx}{r}, \qquad v=\left(\frac{dk}{dy}\right)=\frac{Vy}{r}, \qquad w=\left(\frac{dk}{dz}\right)=\frac{Vz}{r}$$

da cui si deduce

$$d'k=\frac{V(xd'x+yd'y+zd'z)}{r}=Vd'r$$

$$(\beta) \qquad k=\int Vd'r$$

357. Ma qui si avverta che volendo dedurre il valore generale di k dalle equazioni (α) che esprimono la convergenza delle molecule situate sulla superficie interna del cono al vertice di di esso, si viene a supporre la stessa convergenza a tutte le molecole componenti la massa liquida; vale a dire si prende per dato ciò che in seguito si pretende dimostrare come risultato della presente analisi.

358. Premessa questa necessaria avvertenza si osservi che per la possibile esistenza della (β) dovrà essere $V=f(r)$, e però si avrà

$$u=f(r)\frac{x}{r}=\left(\frac{dk}{dx}\right)$$

$$v=f(r)\frac{y}{r}=\left(\frac{dk}{dy}\right)$$

$$w=f(r)\frac{z}{r}=\left(\frac{dk}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{d^2k}{dx^2}\right)=\frac{f(x)}{r}+\left(\frac{d.f(r)\frac{1}{r}}{dr}\right)\frac{x^2}{r}$$

$$\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)=\frac{f(x)}{r}+\left(\frac{d.f(r)\frac{1}{r}}{dr}\right)\frac{y^2}{r}$$

$$\left(\frac{d^2k}{dz^2}\right)=\frac{f(x)}{r}+\left(\frac{d.f(r)\frac{1}{r}}{dr}\right)\frac{z^2}{r}$$

onde sostituendo nella (9) essa diventa

$$\frac{3f(r)}{r}+\left(\frac{d.f(r)\frac{1}{r}}{dr}\right)r=0$$

da cui

$$\frac{d.f(r)\frac{1}{r}}{f(r)\frac{1}{r}}=-\frac{3dr}{r}$$

e integrando

$$\log.\frac{f(r)}{r}=\log.\left(\frac{A}{r^3}\right)$$

e perciò

$$f(r)=\frac{A}{r^2}$$

sarà dunque

$$k=B-\frac{A}{r},\quad V=\frac{A}{r^2}$$

$$u=\frac{Ax}{r^3},\quad v=\frac{Ay}{r^3},\quad w=\frac{Az}{r^3}$$

$$p=C+\int Fd'f+\left(\frac{dA}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{A^2}{2}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}.$$

359. Giunto il Venturoli a queste equazioni che coincidono colle (4) e (5) del §. 344. determina le funzioni arbitrarie del tempo C ed A con metodi analoghi a quelli adoperati nella teoria del moto lineare, supponendo cioè cognite le pressioni in alcune situazioni della data massa.

Troppo ci dilungheremmo dalla nostra via se volessimo seguirlo nella bella discussione di tutti gli ottenuti risultamenti da cui egli deduce conseguenze analoghe a quelle che dipendono dal moto lineare, quando agli strati piani che in questo si considerano normali alla direttrice, si sostituiscano gusci sferici aventi il comun centro nel vertice del cono.

360. Il problema propostosi dal Prof. Giulio è relativo all'efflusso dell'acqua dai vasi conoidali generati dalla rotazione intorno all'asse delle x della curva che ha per equazione $xy^2=a^3$.

Siccome

$$2x^2-(y^2+z^2)=\text{cost.}$$

rappresenta le superficie tutte normali alle iperbole della famiglia della generatrice del vaso, così ha veduto che prendendo k eguale ad una funzione di $2x^2-y^2-z^2$ si soddisfa alla condizione che il liquido scorra radendo le generatrici suddette. Ma dovendo questa funzione soddisfare anche alla (9) facile è il persuadersi che conviene porre

$$k=[2x^2-(y^2+z^2)]A$$

rappresentando con A una funzione arbitraria del tempo.

Interessantissimo poi è il modo con cui egli seguendo la traccia della soluzione dell' antecedente problema, prende a determinare la pressione e la velocità per una molecula qualunque, nonchè la portata dall' infima sezione, e le superficie di egual pressione corrispondenti a $d'p=0$.

361. Ciò nullameno per quanto siano lodevoli gli ingegnosi metodi con cui i due illustri autori hanno studiato di determinare negli esposti casi particolari le leggi del moto dei liquidi riferiti a tre coordinate, è pur d' uopo convenire che sono lungi dall' offrire quella generalità che si riscontra nella soluzione del problemi relativi al moto di un velo fluido riferito a due sole coordinate. E ciò è ben naturale, imperocchè in quest' ultimo caso si può ottenere l' integrale completo della (10) il quale racchiude in se stesso la soluzione di un infinità di particolari problemi dipendenti dalla varia natura delle linee entro cui il velo fluido è obbligato a muoversi. Io credo quindi che debba riputarsi utile qualunque tentativo diretto ad ottenere delle espressioni di k che soddisfacendo alla (9), in virtù delle funzioni arbitrarie da esse contenute, siano altresì adatte a somministrare in un modo più generale, un gran numero di soluzioni diverse di problemi relativi al moto de' fluidi a tre dimensioni

A tale oggetto mi sembrò convenire la seguente formula

$$k=\psi[x\sqrt{1+m^2}+(y\pm mz)\sqrt{-1}]+\varphi[x\sqrt{1+m^2}-(y\pm mz)\sqrt{-1}]+$$
$$\psi_1[y\sqrt{1+m_1{}^2}+(z\pm m_1x)\sqrt{-1}]+\varphi_1[y\sqrt{1+m_1{}^2}-(z\pm m_1x)\sqrt{-1}]+$$
$$\psi_2[z\sqrt{1+m_2{}^2}+(x\pm m_2y)\sqrt{-1}]+\varphi_2[z\sqrt{1+m_2{}^2}-(x\pm m_2y)\sqrt{-1}]$$

Questa soddisfacendo alla (9) qualunque sieno i valori di m, m_1, m_2, non può veramente risguardarsi quale integrale completo della equazione medesima; dovendo l' integrale completo comporsi della somma di tutti gli integrali particolari dedotti dal precedente attribuendo alle tre indeterminate m, m_1, m_2 tutti i possibili valori da zero all' infinito.

La semplice ispezione del trovato integrale rende manifesti gli innumerevoli casi in cui, tenuta ferma l'ipotesi di $d'k$ differenziale esatto, può variare il movimento di una massa liquida conservando la propria continuità, ed incompressibilità; poichè oltre alla forma arbitraria delle funzioni in esso contenute, si scorge che dipendentemente dal numero, e dalla discontinuità di queste, si possono obbligare le varie molecule del liquido a soddisfare nel loro moto ad altrettante diverse condizioni quali sarebbero quelle a cagion di esempio, di scorrere lungo date linee o superficie.

Quando però si limiti il numero delle superficie che costituiscono le faccie del recipiente, e lungo le quali deve muoversi il liquido, questo integrale potrà ridursi a contenere soltanto quel numero di funzioni arbitrarie che sono suscettibili di determinazione dipendentemente dalle condizioni cui il sistema è assoggettato. E a una tale determinazione potranno essere utili i metodi che si devono al celebre Monge, dedotti dall' integrazione di equazioni alle differenze.

Quantunque il metodo da tenersi nella soluzione del presente problema sia analogo a quello già usato nell' antecedente relativo a due sole coordinate, pure le difficoltà nel caso attuale sono molto maggiori in quanto chè, per assegnare la forma delle funzioni arbitrarie, si giunge in generale ad equazioni alle differenze di gradi elevati e di laboriosa integrazione.

362. Se si volesse che la superficie interna del vaso fosse generata dalla rivoluzione di una curva piana intorno all'asse delle x; e se di più si supponesse il moto simmetrico intorno a quest'asse, osservando che il valore di k deve essere invariabile cangiando z ed y separatamente, o unitamente in $-z$, e $-y$, potrà ridursi alla forma seguente

$$k=\varphi(x\sqrt{2}+(y+z)\sqrt{-1})+\varphi(x\sqrt{2}-(y+z)\sqrt{-1})+$$
$$\varphi(x\sqrt{2}+(y-z)\sqrt{-1})+\varphi(x\sqrt{2}-(y-z)\sqrt{-1})$$

in cui non vi è di indeterminato che la forma della sola funzione φ.

In questo valore è compresa ancora la soluzione del Prof. Giulio relativa all' efflusso dei liquidi pei vasi conoidali, come è facile a verificarsi avvertendo che si ha

$$k = \frac{A}{4}(x\sqrt{2} + (y+z)\sqrt{-1})^2 + \frac{A}{4}(x\sqrt{2} - (y+z)\sqrt{-1})^2 +$$

$$\frac{A}{4}(x\sqrt{2} + (y-z)\sqrt{-1})^2 + \frac{A}{4}(x\sqrt{2} - (y-z)\sqrt{-1})^2$$

$$= A(2x^2 - y^2 - z^2)$$

363. Io credo poi che in parecchi casi in cui il trinomio

$$ud'x + vd'y + wd'z$$

è un differenziale esatto, possa riescire utile il metodo proposto recentemente dal Sig. Prof. Domenico Turazza e di cui darò quì un succinto ragguaglio.

Effettua egli da prima la nota trasformazione della (a) in un altra a coordinate polari, ponendo

$$x = r\text{sen.}\theta\cos.\psi\,, \quad y = r\text{sen.}\theta\text{sen.}\psi\,, \quad z = r\cos.\theta$$

con cui essa convertesi nella

$$(A) \quad \left(\frac{d.^2 rk}{dr^2}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen.}^2\theta}\left(\frac{d.\left\{\text{sen.}\theta\left(\frac{d.rk}{d\theta}\right)\right\}}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen.}^2\theta}\left(\frac{d.^2 rk}{d\psi^2}\right) = 0$$

Quindi egli pone

$$rk = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$$

rappresentando con Q_0 Q_1 $Q_2 \ldots$ delle funzioni razionali delle coordinate polari, ciascuna delle quali verifica la seguente

$$(B) \quad \frac{1}{\text{sen.}\theta}\left(\frac{d.\left\{\text{sen}\theta.\left(\frac{d.Q_n}{d\theta}\right)\right\}}{d\theta}\right) + \frac{1}{\text{sen.}^2\theta}\left(\frac{d^2 Q_n}{d\psi^2}\right) + n(n+1)Q_n = 0$$

In tale supposizione si soddisfa alla (A) mediante la

$$\left(\frac{d^2 Q_n}{dr^2}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2}Q_n = 0$$

la quale ha per integrale completo

$$Q_n = \frac{A_n}{r^n} + B_n r^{n+1}$$

si avrà perciò

$$(C) \qquad k = \Sigma_0^\infty \frac{A_n}{r^{n+1}} + \Sigma_0^\infty B_n r^n$$

dove A_n e B_n sono funzioni di θ e ψ che verificano la (*B*).

La (*C*) può quindi essere considerata come un integrale della (*A*) che contiene due somme infinite, che si sa d'altronde corrispondere a due distinte funzioni arbitrarie.

Veramente potrebbe cader dubbio se queste due sole funzioni arbitrarie possano costituire completo il trovato integrale della proposta, stante l' incertezza del numero delle funzioni che servono a completare gl' integrali delle equazioni a differenze parziali d' ordini superiori, e a più variabili. E questo dubbio potrebbe viemaggiormente essere confermato dall' osservare che le espressioni di k del §. 361. quantunque contengano due o più funzioni arbitrarie delle coordinate e del tempo, pure non si devono considerare che semplici integrali particolari della proposta.

Ciò non pertanto è certo che anche sotto questa forma può talvolta convenire di adoprare il valore di k.

Ad illustrazione del suo metodo il Sig. Turazza si fa ad applicare le formule sopra scritte al caso del moto de' liquidi per un vaso conico, la cui superficie sia determinata generalmente dall' equazione

$$y^2 + z^2 = m^2 x^2.$$

Supponendo egli che le molecule del liquido giacenti in questa superficie siano dirette al vertice del cono, stabilisce le tre seguenti

$$m^2 xu - yv - zw = 0$$

$$xw - zu = 0$$

$$\cos.\psi = \frac{1}{\text{sen}.\theta\sqrt{1 + m^2}}$$

Troppo lungo però riescirebbe il seguire il dotto autore nell' ingegnoso ragionamento con cui si propone dimostrare che in conseguenza di esse tutti gli A_n e B_n sono nulli, toltone A_0 e B_0, e che perciò si ottiene il noto risultato che abbiamo già altrimenti e più volte ricavato

$$k = B + \frac{A}{r}.$$

Soltanto faremo risovvenire che è applicabile a questo modo di determinare i coefficienti A_n e B_n l' osservazione registrata al §. 349. e con cui si mostrava che ne rimane limitata la generalità della soluzione del problema.

Resterebbe ora a trattare con maggior estensione dei casi in cui il trinomio $ud'x + vd'y + wd'z$ non è differenziale esatto; ma altrove io mi riserbo a parlarne, imperocchè la difficoltà e l' elevatezza dell' argomento non permettono che sia convenientemente collocato in un corso elementare, e perchè sembrami quasi di sentirmi rimproverare di avere oltrepassati i limiti concessi a queste ricerche speculative massimamente da coloro che le reputano di poca o niuna utilità alla pratica.

Io però ho voluto su di esse tenere non breve discorso, giacchè vado persuaso che anche la pratica idraulica da codesti studii teorici, possa trarre sicuro giovamento; e perchè offrendo ai giovani questo saggio mi sono prefisso di invogliarli a percorrere un campo tuttora in gran parte incolto dove possono cogliere ubertosa messe. E se a così nobile impresa si accingeranno, potrà servir loro di molto vantaggio la lettura delle opere di varii nostri Idraulici nazionali, e specialmente dei lavori che il Sig. Piola ha pubblicato e sta pubblicando su tali argomenti, e dai quali la scienza ha la ferma lusinga di ritrarre lustro ed incremento.

◆

NOTE, AGGIUNTE E CORREZIONI AL VOLUME I.

Pag.	Linea	Errore	Correzione
16	22	di cui le (2) e (4) sono necessarie conseguenze delle (1) e (3)	di cui le (2) e (3) sono necessarie conseguenze delle (1) e (4).
29	13	e la posizione.	e la posizione della risultante
41	ult.	$r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta dr$	$r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta d\psi$
44	5	$\int xydr$	$\int xyds$
51	ult.	$x' = \frac{h^2}{3}\frac{y'+2y''}{y'+y''}$	$x' = \frac{h}{3}\frac{y'+2y''}{y'+y''}$
65	9	$dy = zd\omega + dh'$, $dz = dh'' - yd\omega$	$dy = dh' - zd\omega$, $dz = dh'' + yd\omega$
id.	19	$z = \frac{-dh'}{d\omega}$, $y = \frac{dh''}{d\omega}$	$z = \frac{dh'}{d\omega}$ $y = \frac{-dh''}{d\omega}$
id.	30	$dy = zd\omega$, $dz = -yd\omega$	$dy = -zd\omega$, $dz = yd\omega$
66		*al. §. 129. si sostituisca il seguente.*	

129. Un corpo mobile attorno ad un asse fisso è in equilibrio quando è animato da forze i cui momenti intorno all'asse stesso sono eguali e di segno contrario (§. 119.). Così a cagion d'esempio, immaginando immobili i punti situati sull'asse delle z deve sussistere l'equazione $M_{(z)} = 0$. Che se il corpo è scorrevole lungo l'asse stesso in guisa tale che possa in esso immaginarsi infilzato, converrà inoltre per l'equilibrio che sussista l'equazione $\Sigma Z = 0$, altrimenti le forze ΣX, ΣY esistenti in piani normali all'asse non potrebbero impedire il moto progressivo del corpo lungo l'asse medesimo prodotto dalle ΣZ. Dunque l'equazioni $M_{(z)} = 0$, $\Sigma Z = 0$ sono necessarie e bastanti ad assicurare l'equilibrio di un sistema rigido che può rotare attorno ad un asse fisso Oz, e scorrere lungh'esso.

Ma il teorema dimostrato superiormente ci rende palese che il moto iniziale di un sistema rigido libero si effettua con contemporanea rotazione e progressione, relative ad un asse momentaneamente fisso; ne conseguita quindi, che detto Oz' un tale asse istantaneo, per l'equilibrio delle forze intorno al medesimo conviene che sia $\Sigma Z' = 0$, $M_{(z')} = 0$. Siccome poi devono susaistere queste equazioni qualunque sia l'asse istantaneo che si considera acciocchè siano impediti al corpo tutti i possibili movimenti iniziali, così converrà, e basterà che sussistano le sei seguenti

$$\text{(e)} \qquad \Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma Z = 0;\ M_{(x)} = 0,\ M_{(y)} = 0,\ M_{(z)} = 0$$

che qualunque sia la situazione degli assi conducono sempre alle $\Sigma Z' = 0$ $M_{(z')} = 0$ indipendentemente dagli angoli $\widehat{xz'}$, $\widehat{yz'}$, $\widehat{zz'}$.

Coloro che preferissero dedurre queste equazioni necessarie all'equilibrio di un sistema rigido dai soli principj che ci hanno servito di guida nella composizione e decomposizione delle forze potrebbero tenere il metodo seguente.

Lemma. Perchè più forze parallele si facciano equilibrio agendo in un corpo solido, conviene che la risultante di quelle dirette in un senso sia eguale e direttamente opposta alla risultante di quelle dirette in senso contrario. Per esprimere analiticamente questa condizione, si indichino con P, P', P'', le forze dirette in un senso, e con P_1 P'_1 P''_1 quelle dirette in senso opposto, ed assumendo l'asse delle z parallelo alla direzione delle forze, le coordinate della risultante ΣP delle prime dovranno essere eguali alle coordinate analoghe della ΣP_1; e però si dovrà avere

$$\Sigma P + \Sigma P_1 = 0, \quad \frac{\Sigma.Px}{\Sigma P} = \frac{\Sigma.P_1x_1}{\Sigma P_1}, \quad \frac{\Sigma.Py}{\Sigma P} = \frac{\Sigma.Py_1}{\Sigma P_1}$$

da cui si traggono le due

$$\Sigma.Px + \Sigma.P_1x_1 = 0 \quad \Sigma.Py + \Sigma Py_1 = 0$$

e comprendendo sotto lo stesso simbolo sommatorio le forze parallele dirette in ambedue i sensi, supponendole implicitamente affette di segno contrario, le tre equazioni necessarie e bastanti all'equilibrio, saranno le

$$(1) \qquad \Sigma P = 0 \quad \Sigma.Px = 0 \quad \Sigma.Py = 0$$

Se i punti di applicazione delle forze sono tutti situati sopra una linea retta, prendendola per asse delle x le equazioni di condizione si ridurranno alle due sole

$$(2) \qquad \Sigma P = 0, \quad \Sigma.Px = 0$$

Abbiansi ora più forze S, S', S'', ... dirette comunque nello spazio ed applicate ad un sistema rigido nei punti corrispondenti alle coordinate

$$(x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), \ldots$$

Prendansi tre assi arbitrarii ortogonali, in guisa tale che le direzioni di S, S', S'', o delle loro componenti intersechino il piano xy nei punti dalle coordinate (x, y_1), (x', y'_1), $(x_1''\ y_1'')$ ec. ed ivi si trasportino le forze S, S', S'', decomponendole poscia nelle Z, Z', Z'' parallele all'asse delle z e nelle s, s', s'', esistenti nel piano xy. Si prolunghino le direzioni di queste ultime fino ad intersecare l'asse delle x, nei punti corrispondenti alle ascisse x_2, x_2', x_2'' ...; ed ivi trasportando i loro punti di applicazione si risolvano finalmente nella X, X', X'' ...; Y, Y', Y'', ..., dirette le prime secondo l'asse delle x, normali le altre all'asse medesimo.

Volendo che le date forze si facciano equilibrio è evidente che l'equilibrio deve sussistere parzialmente rispetto ai tre gruppi di forze ortogonali in cui esse sono state decomposte. Infatti, se le forze Z non si distruggessero scambievolmente tra loro, e ciò nullameno si riguardasse il sistema equilibrato, si potrebbe senza turbarne lo stato rendere fissa una retta qualunque tracciata nel piano xy, con che verrebbesi ad annullare l'effetto di tutte le forze X ed Y comprese in questo piano, e perciò si potrebbero togliere. Ma in tal caso le forze parallele alle z farebbero in generale rotare il sistema intorno alla retta che abbiamo resa fissa a meno che non avesse luogo il loro parziale equilibrio.

Con analogo ragionamento si proverebbe, fissando un punto dell'asse delle x, che le Y debbono farsi equilibrio parzialmente tra loro; come pure le X.

Dovranno dunque per le Z verificarsi le equazioni (1) cioè

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma . Z y_1 = 0, \quad \Sigma . Z x_1 = 0$$

per le Y, le equazioni (2)

$$\Sigma Y = 0 \quad \Sigma . Y x_2 = 0$$

e per le X dirette tutte secondo l'asse delle x la sola $\Sigma X = 0$.

Ma si noti che il momento della S rispetto all'asse delle x è $Zy - Yz$, e questo momento non cambia di valore trasportando la forza data in un punto qualunque della sua direzione cioè nel punto delle coordinate $z = 0$, y_1, ed x_1; onde si avrà

$$Z y_1 = Zy - Yz$$

nello stesso modo si troverà

$$Z x_1 = Zx - Xz$$

Inoltre il momento della S rispetto all'asse della z deve essere eguale al momento della s, ed il momento di questa equivale ad $Y x_2$; dunque si avrà

$$Y x_2 = Yx - Xz$$

Saranno dunque per l'equilibrio del sistema necessarie e bastanti le sei equazioni

$$(e) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0, \; \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z = 0, \\ \Sigma(Yx - Xy) = 0, \; \Sigma(Zy - Yz) = 0, \; \Sigma(Xz - Zx) = 0 \end{array} \right.$$

come avevamo trovato col metodo antecedente.

Scolio. Potrebbe essere che qualcuna delle forze S riescisse parallela al piano xy per cui la sua direzione prolungata non intersecherebbe il piano medesimo; e talvolta ancora potrebbe accadere che qualcuna delle s, riescendo parallela all'asse delle x non lo incontrasse giammai Ma per ovviare a questo inconveniente, si consideri la S come risultante di tre altre forze P, Q, R le cui direzioni essendo arbitrarie si possono prendere in guisa che incontrino il piano xy, e che le loro projezioni su questo piano non siano parallele ad Ox.

Ciò posto, ed osservando che

$$X = P\cos\widehat{Px} + Q\cos\widehat{Qx} + R\cos\widehat{Rx}$$
$$Y = P\cos\widehat{Py} + Q\cos\widehat{Qy} + R\cos\widehat{Ry}$$
$$Z = P\cos\widehat{Pz} + Q\cos\widehat{Qz} + R\cos\widehat{Rz}$$

si vedrà che i termini dipendenti da queste tre forze P, Q, ed R che devono introdursi nelle (e), sono quelli stessi che trarrebbero origine dalla **X, Y, Z**, e però l'offerta dimostrazione non riescirà meno rigorosa.

Pag. 67. *Al §. 131 si aggiunga il seguente*

(131) *bis.* Dalle esposte considerazioni chiaro ne emerge che non sempre esiste la risultante di un sistema di forze applicate ai varii punti di un corpo rigido. Però è agevole il dimostrare che le forze date possono sempre ridursi ad un infinità di sistemi diversi di due forze.

Suppongansi infatti le forze date equivalere alle due E ed F, l'ultima delle quali per maggior semplicità immagineremo che passi per l'origine arbitraria delle coordinate, mentre la prima ha per coordinate di un punto qualunque della sua direzione le x_1, y_1, z_1

Siccome vi deve essere equilibrio tra le forze date, e le E ed F prese in contrario senso, dovranno sussistere le sei equazioni seguenti

$$
\text{(i)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma X - E\cos\widehat{Ex} - F\cos\widehat{Fx} = 0\\
&\Sigma Y - E\cos\widehat{Ey} - F\cos\widehat{Fy} = 0\\
&\Sigma Z - E\cos\widehat{Ez} - F\cos\widehat{Fz} = 0
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(j)}\quad \left\{\begin{aligned}
&M(z) - E(\cos\widehat{Ey}.x_1 - \cos\widehat{Ex}.y_1) = 0\\
&M(y) - E(\cos\widehat{Ex}.z_1 - \cos\widehat{Ez}.x_1) = 0\\
&M(x) - E(\cos\widehat{Ez}.y_1 - \cos\widehat{Ey}.z_1) = 0
\end{aligned}\right.
$$

E sostituendo nelle (j) i valori di $E\cos\widehat{Ex}$, $E\cos\widehat{Ey}$, $E\cos\widehat{Ez}$ tratti dalle (i), si avranno tre equazioni che appartener devono ad una retta coincidente colla direzione della forza E. Ma perchè queste tre aquazioni rappresentino realmente una retta conviene che si verifichi la

$$
(l)\quad -F[\cos\widehat{Fx}M_{(x)} + \cos\widehat{Fy}M_{(y)} + \cos\widehat{Fz}M_{(z)}] + \Sigma X M_{(x)} + \Sigma Y M_{(y)} + \Sigma Z M_{(z)} = 0
$$

ossia la

$$
(h)\qquad E[\cos\widehat{Ex}M_{(x)} + \cos\widehat{Ey}M_{(y)} + \cos\widehat{Ez}M_{(z)}] = 0
$$

a cui si può soddisfare in infiniti modi determinando convenientemente la F, e gli angoli formati dalla di lei direzione cogli assi.

Assunto quindi un valore e una direzione della F che soddisfi alla (l), l'intensità e la posizione della E, saranno pienamente determinate mediante le seguenti

$$
E = \sqrt{(\Sigma X - F\cos\widehat{Fx})^2 + (\Sigma Y + F\cos\widehat{Fy})^2 + (\Sigma Z - F\cos\widehat{Fz})^2)}
$$

$$
\cos\widehat{Ex} = \frac{\Sigma X - F\cos\widehat{Fx}}{E},\quad \cos\widehat{Ey} = \frac{\Sigma Y - F\cos\widehat{Fy}}{E},\quad \cos\widehat{Ez} = \frac{\Sigma Z - F\cos\widehat{Fz}}{E}
$$

Si noti poi che allorquando il sistema è irreducibile ad un'unica risultante, la F e la E devono necessariamente esistere in piani differenti.

Pag. 78. *lin* 4 *risalendo* d' assi paralleli d' assi

» 80. *dopo il* §. 154. *si aggiunga.*

(154.) *bis*. Richiamando quanto fu detto al §. (131.) *bis* relativamente all'esistenza di infiniti sistemi di due forze E ed F equivalenti a più forze che animano i varii punti di un corpo, è facile dimostrare, dietro le trovate formule, che il tetraedro formato congiungendo a due a due gli estremi delle E ed F ha un volume costante, qualunque sia il sistema di due forze risultanti che essse rappresentano.

Si osservi dapprima che l'equazione (h) del citato paragrafo che deve verificarsi nella nostra ipotesi, è riducibile a questa più semplice

$$M_{(x')}\cos\widehat{Ex'}=0$$

da cui si deduce che l'angolo $\widehat{Ex'}$ deve eguagliare 90°, e però la forza E deve esistere in un piano normale all'asse principale che passa per l'origine assunta.

Si richiami quindi dalla Geometria analitica quella proposizione per cui si dimostra che il volume V del descritto tetraedro eguaglia la sesta parte del prodotto dei due lati E ed F e della loro più breve distanza; cioè la sesta parte della F moltiplicata pel momento della forza E rispetto ad un asse che passa per la direzione Of della F.

Ma equivalendo le E ed F alle componenti date, certo è che il momento della E rispetto alla direzione della F pareggierà il momento delle componenti stesse; ossia, dovrà essere eguale al momento principale decomposto secondo l'asse Of, cioè $M_{(x')}\cos\widehat{Fx'}$. Ponendo dunque per brevità il trinomio

$$\Sigma X M_{(x)}+\Sigma Y M_{(y)}+\Sigma Z M_{(z)}=P$$

ed avvertendo alla prima del §. 151., avremo

$$V=\frac{F}{6}M_{(x')}\cos\widehat{Fx'}=\frac{1}{6}\frac{F\cos\widehat{Fx'}}{R\cos\widehat{R'x'}}P$$

Ma perchè R' è la risultante fittizia di tutte le componenti date trasportate parallelamente a loro stesse in un sol punto di applicazione dovrà essere

$$R'\cos\widehat{R'x'}=E\cos\widehat{Ex'}+F\cos\widehat{Fx'}=F\cos\widehat{Fx'}$$

dunque

$$V=\frac{P}{6}.$$

Il trinomio P essendo costante per qualunque inclinazione di assi e per qualunque origine, ne conseguita, che ad onta della supposizione particolare che la F passi per l'origine delle coordinate, pure si può in generale asserire, che in qualunque sistema di due risultanti equivalenti alle forze componenti date, la piramide triangolare che si formerebbe congiungendo gli estremi delle risultanti medesime ha un volume costante.

Pag. 109. *Si aggiunga al* §. 198. *il seguente.*

(198) *bis*. Supponendo come nel paragrafo antecedente di avere una superficie flessibilissima divisa in tante strisce comprese da linee tra loro nor-

mali, e coi rispettivi raggi d' osculo coincidenti colla normale alla superficie data (come sarebbero a cagione d' esempio le linee di massima e di minima curvatura) si possono applicare facilmente all' equilibrio di queste striscie le equazioni (9) del §. 182. che eseguita la differenziazione diventano, nella nostra ipotesi

$$(a)\qquad\begin{cases} Xds\delta\sigma=-qds\delta\dfrac{\delta x}{\delta\sigma}-\dfrac{\delta x}{\delta\sigma}\delta.qds-p\delta\sigma d\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds}d.p\delta\sigma \\[2ex] Yds\delta\sigma=-qds\delta\dfrac{\delta y}{\delta\sigma}-\dfrac{\delta y}{\delta\sigma}\delta.qds-p\delta\sigma d\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}d.p\delta\sigma \\[2ex] Zds\delta\sigma=-qds\delta\dfrac{\delta z}{\delta\sigma}-\dfrac{\delta z}{\delta\sigma}\delta.qds-p\delta\sigma d\dfrac{dz}{ds}-\dfrac{dz}{ds}d.p\delta\sigma \end{cases}$$

Avvertendo alla nota III. e chiamando ρ, ρ' i raggi osculatori corrispondenti agli archi s e σ si avranno ancora le seguenti equazioni

$$(b)\qquad\begin{cases} \cos\widehat{\rho x}=\cos\widehat{\rho' x}=\cos\widehat{Nx}=\rho\dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds}=\rho'\dfrac{\delta\dfrac{\delta x}{\delta\sigma}}{\delta\sigma} \\[4ex] \cos\widehat{\rho y}=\cos\widehat{\rho' y}=\cos\widehat{Ny}=\rho\dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds}=\rho'\dfrac{\delta\dfrac{\delta y}{\delta\sigma}}{\delta\sigma} \\[4ex] \cos\widehat{\rho z}=\cos\widehat{\rho' z}=\cos\widehat{Nz}=\rho\dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}=\rho'\dfrac{\delta\dfrac{\delta z}{\delta\sigma}}{\delta\sigma} \end{cases}$$

Decomponganasi ora le $Xds\delta\sigma$, $Yds\delta\sigma$, $Zds\delta\sigma$ in tre forze $P\delta\sigma$, Qds, $Nds\delta\sigma$ dirette respettivamente secondo le tangenti agli archi s, e σ, e secondo la normale comune $N.$, e si avrà

$$(c)\qquad\begin{cases} Xds\delta\sigma=P\delta\sigma\dfrac{dx}{ds}+Qds\dfrac{\delta x}{\delta\sigma}+Nds\delta\sigma.\cos\widehat{Nx} \\[2ex] Yds\delta\sigma=P\delta\sigma\dfrac{dy}{ds}+Qds\dfrac{\delta y}{\delta\sigma}+Nds\delta\sigma.\cos\widehat{Ny} \\[2ex] Zds\delta\sigma=P\delta\sigma\dfrac{dz}{ds}+Qds\dfrac{\delta z}{\delta\sigma}+Nds\delta\sigma.\cos\widehat{Nz} \end{cases}$$

Moltiplico le equazioni (a) respettivamente per $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$ e le sommo; poscia le moltiplico ordinatamente per $\dfrac{\delta x}{\delta\sigma}$, $\dfrac{\delta y}{\delta\sigma}$, $\dfrac{\delta z}{\delta\sigma}$ e parimente le sommo. Ripeto quindi le medesime operazioni sulle (c) ed otterrò

$$Qds=Xds\delta x+Yds\delta y+Zds\delta z=-\delta.qds$$
$$P\delta\sigma=X\delta\sigma dx+Y\delta\sigma dy+Z\delta\sigma dz=-d.p\delta\sigma$$

Sostituendo questi valori di Qds e $P\partial\sigma$ nelle (c) poi sottraendole dalle (a) si riceveranno le seguenti

$$N ds\partial\sigma \cos\widehat{Nx} = -q ds \partial\frac{\partial x}{\partial\sigma} - p\partial\sigma d\frac{dx}{ds}$$

$$N ds\partial\sigma \cos\widehat{Ny} = -q ds \partial\frac{\partial y}{\partial\sigma} - p\partial\sigma d\frac{dy}{ds}$$

$$N ds\partial\sigma \cos\widehat{Nz} = -q ds \partial\frac{\partial z}{\partial\sigma} - p\partial\sigma d\frac{dz}{ds}$$

che avvertendo alle (c) si trasformano tutte tre nella sola

$$N = \left(\frac{q}{\rho'} + \frac{p}{\rho}\right)$$

Se si volesse che la tensione q fosse eguale a p si avrebbe

$$N = p\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$$

e sapendosi dall'analisi superiore che, qualunque siano gli archi s e σ perchè si taglino normalmente sulla data superficie, e abbiamo i respettivi raggi di osculo coincidenti colla normale alla medesima, la quantità $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$ è costante, se ne concluderà che qualunque elemento di superficie si consideri, esso sarà egualmente teso in tutti i sensi. Supponendo di più la forza N costante converrebbe arguirne che la superficie data è da per tutto non chè in tutti i sensi egualmente tesa.

98	14	K ed H	H, e K
99	19	sforzo K	sforzo H
112		*Nei paragrafi* 202, e 203 *si cangi segno al raggio osculatore* ρ.	
116	16	$p\left(\frac{b-y}{2\cdot 2}\right)^2$	$p\frac{(b-y)^2}{2}$
118		*nell'equazione* (5) $a'k\tan g.x'$	$a'k\tan g.\alpha$
121		*nel* §. 125 *mancano alcuni apici agli* a.	
123	27	$x=0$; ed $x=a$,	$x=0$, ed $x=a$;
137	20	$T(mm'')$	$T(m'm'')$
174	5	continua	continua, e variabile
224	20	per la distanza	pel quadrato della distanza
236	21	dell' asse Oz'	dell' asse Oy'
237	2	$x'y$	xy
264	11	$=pdt$	$=-pdt$
296	8	le direzioni	le direzioni delle velocità
302	4	(9)	(g)
335	5	della $\varphi(0)$	della $\varphi(x)$
337	8	$n-2$	$\frac{1}{n^2}$
342	3	$x_1'''=y'''=z_1'''=0 \quad x''=$ etc.	$x_1''', y_1''', z_1'''; \; x_1'', y_1'', z_1''=0$ $x_1', y_1', z_1'=0$

Pag. 4. §. 12 *Errori* *Correzioni*

Alcune esperienze di Rudberg avevano posto in dubbio l'esattezza del valor numerico del coefficiente della dilatazione dei gas, che secondo Gay Lussac si esprimeva generalmente con $\alpha = 0{,}00375$, e portavano a concludere che si dovesse diminuirlo di $\frac{1}{37}$ circa riducendolo ad $\alpha = 0{,}003646$. Recentemente il Sig. Regnault abile fisico francese ha ripetuto in varii modi le esperienze relative, ed ha trovato che per l'aria atmosferica il medio valore del ricercato coefficiente è $\alpha = 0{,}003665$. Questo stesso fisico inclina a credere che il coefficiente di dilatazione varii per i differenti gas; ed infatti due serie di esperimenti istituite per determinarlo relativamente al gas acido carbonico gli hanno somministrato $\alpha = 0{,}0036873$.

Se questi risultamenti sono con maggior certezza verificati converrà calcolare nuovamente tutte le formule che contengono il valor numerico di α, ponendovi quelli che si sono trovati, e che si troveranno per i differenti gas presi in considerazione.

Pag. 10. §. 23.

I limiti degli integrali dupli che si riferiscono alle pressioni superficiali indicati nel §. 22. sono inversi di quelli degli integrali tripli relativi alle forze che animano l'intera massa dopo avere effettuata la prima integrazione; perchè dunque ciò non accada nelle equazioni (1), e nelle (3) successive, si sono cangiati i segni dei secondi membri di esse.

Pag. 23	*linea* 19	alla verticale	alla orizzontale
27	11	$(z' - z)$	$(z_1 - z)$
id.	15	$p - p_1$	$p - p_2$
id.	17, 18	$\int\int \rho' \ldots$	$\int\int\int \rho' \ldots$
3*a*	17	$\frac{\rho V}{m + \rho V}$	$\frac{\rho V}{M + \rho V}$
id.	4 *risal.*	$- \rho' V' h$	$- \rho V' h'$
31	5	$- \rho V h'$	$- \rho V' h'$
36	6	$b(a\delta - x\rho)$	$gb(a\delta - x_i \rho)$
37	6 *risal.*	$= l$	$- l$
38	22	$\frac{P'}{G}$	$\frac{P}{G}$
39	*formula* (c)	$\Pi\gamma - \Pi'\gamma'$	$\Pi\gamma' - \Pi'\gamma$
42	*ultima*	del presente	del terzo
45	19, 20	D, e D'	D', e D
46	5 *risal.*	$\left(\frac{dq}{dp}\right)\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)$	$\left(\frac{dq}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)$

49 20 $p'=k\rho'(1+\alpha\theta)$ $p''=k\rho''(1+\alpha\theta)$

57 6 *risal.* il raggio il raggio della superficie

59 3 $\gamma-c$ $r-c$

61 L'equazione (A') può anche rendersi più propria alla esatta misura delle altezze ponendovi in luogo di h', $h'\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)$

68 § 145

Si noti che in queste formule il raggio osculatore r è preso positivamente partendosi dalla curva e andando verso il centro d'osculo; che se si intendesse di calcolare l'aumento di questo raggio in direzione opposta converrebbe nelle formule di questo capitolo cangiarne il segno.

80 6 Nell'equazione (K) tutti tre i termini devono esser positivi

89 21 $W=\frac{d\sigma}{dt}$ $W=\frac{ds}{dt}$

105 8 *risal.* $K-h$ $K-h'$

106 20 l'altezza ω cui l'altezza cui

107 8 *risal.* $+2\rho gnH$ $+2\rho g\frac{n^2}{m}H$

112 *penult.* h k

126 *Equaz.* (δ') $\int_{\sigma_1}^{s'} Td'\sigma$ $-\int_{\sigma_1}^{s'} Td'\sigma$

171 *Equaz.* (8) $\int_{s}^{s'} \omega d\sigma$ $\int_{s}^{s'} \omega dpd\sigma$

187 L'equazione (1) deve essere la seguente

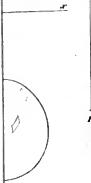
$$p=C+\int Tds-\frac{V^2}{2}-\int\left(\frac{dV}{dt}\right)ds$$

188 21 e 22 B β

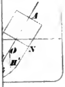
199 5 *risal.* si ommetta $=0$

SBN VA1-1518970
~~609914~~ (2
Biblioteca Nazionale V.E. III - NAPOLI

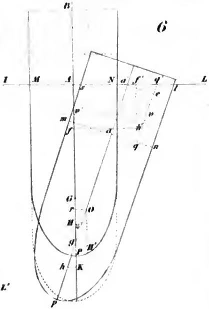
9 1993.



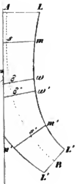
5



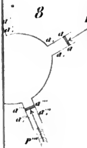
6


B
I
M
A
N
a
f'
q
l
L
s
m
v'
f
a
h'
e
v
q'
n
G
r
O
H
g
P
H'
h
K
p

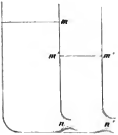
13


A
L
s
m
P
δ
δ'
ω
ω'
s'
m'
L'
B
L'

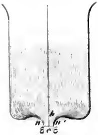
8



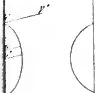
19



20

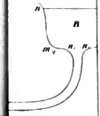


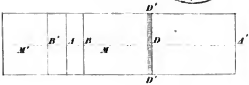
15



NAPOLI

21



24